выражение. Фактически R является производящим функционалом для аномалий. Поэтому предложенная в работах [1, 2] перенормировочная схема оказывается очень удобной для получения тождеств Уорда и для выявления возможных аномалий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *Славнов Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1).
2. *Славнов Д.А.* // Там же. № 2. С. 15 (Ibid. No. 2).
3. *Il'in V.A., Slavnov D.A.* Preprint IHEP 83-80. Serpukhov, IHEP, 1983.
4. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1985. **62**. С. 335.
5. *Селихов А.В., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1986. **67**. С.186.
6. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Comm. Math. Phys. 1975. **42**. P.127.
7. *Тютин И.В.* Препринт ФИАН № 39, М., 1975.

Поступила в редакцию
17.10.97

УДК 621.385.6

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЛОВУШКЕ

А. И. Торопова

(*кафедра квантовой радиофизики*)

Предложен вариант ловушки, в которой частицы движутся в однородном постоянном магнитном поле и электростатическом поле, создаваемом двумя эквипотенциальными плоскостями и аксиальной поверхностью вращения. Найдено решение канонических уравнений. Показано, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса. Исследована модель ловушки, учитывающая конечную проводимость стенок резонатора и потери при столкновениях с газом.

Локализация заряженных и нейтральных частиц в неоднородных переменных электромагнитных полях позволяет создать уникальные условия для проведения сверхточных экспериментов в атомной и ядерной физике. Наибольшее распространение получили электромагнитная ловушка Пеннинга и радиочастотный волновод Пауля [1, 2].

В настоящей работе рассмотрен вариант ловушки, представляющей собой помещенные в однородное постоянное магнитное поле две эквипотенциальные плоскости и аксиальную поверхность вращения, к которым приложена разность потенциалов. Ловушка является открытым резонатором, в котором в результате взаимодействия электронов с внешним полем возникает спонтанное и индуцированное излучение, происходит перераспределение энергии между электронами и полем излучения, изменяется пространственная конфигурация распределения электронов. В рамках гамильтонова формализма рассмотрена эволюция системы электроны–поле при параметрической накачке внешним генератором на одной из комбинационных частот финитного движения электронов. Получено решение канонических уравнений в терминах эллиптических функций. Найдены энергия поля излучения и границы области распределения электронов. Показано, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса. Исследована реалистическая модель ловушки, учитывающая конечную проводимость стенок резонатора и потери при столкновениях с газом. Показано, что в этом случае энергия поля стремится к постоянной величине.

Электромагнитное поле аксиального квадруполя

Рассмотрим электродинамическую систему, в которой потенциал электростатического поля

$$\Phi(r,\varphi,z) = C_0 I_0(kr)\cos(kz)/I_0(kr_0) \qquad (1)$$

создается двумя плоскостями: $z=-l/2$ и $z=l/2$ с потенциалами, равными нулю, и поверхностью вращения $I_0(kr_0)=I_0(kr)\cos(kz)$ с потенциалом C_0 [3]. Здесь $I_0(u)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $k=\pi/l$ [4]. Система находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}=(0,0,B)$. В окрестности начала координат $kr \ll 1$, $kz \ll 1$ потенциал

$$\Phi(r,\varphi,z) \approx V_0[1+(r^2-2z^2)/2R^2], \qquad (2)$$

$V_0 = C_0/I_0(kr_0)$, $R^2 = 2/k^2$ соответствует конфигурации поля ловушки Пеннинга [1].

Область пространства, ограниченная металлическими поверхностями, представляет собой открытый резонатор, в котором можно возбудить стоячие волны. Решение однородных уравнений Максвелла представим в потенциалах A_0 и $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (3)$$

Переменные разделяются в криволинейных ортогональных координатах, для которых координатные поверхности совпадают с поверхностями электродов. В этом случае поперечно-магнитная (TM-волна) или электрическая волна резонатора определяется вектором Герца $\mathbf{G} = (0, 0, G)$, удовлетворяющим условию Лоренца:

$$A_0 = \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}.$$

Функция G удовлетворяет волновому уравнению, решение которого будем искать в виде $G \sim \mathrm{Re}[g \times \times \exp(-i\omega t)]$. Функция g подчиняется уравнению Гельмгольца $\Delta g + (\omega^2/c^2) g = 0$, частное решение которого $g_n = I_0(\chi r)\sin(k_n z)/\chi$, $\omega^2/c^2 = k_n^2 - \chi^2$, $k_n = (2n+1)\pi/l$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Далее ограничимся радиочастотным диапазоном, для которого $\omega/c \ll k_0$, или длина волны $\lambda \gg 2l$. Это условие позволяет использовать одномодовое приближение $g = k^{-1} I_0(kr)\sin(kz)$, $k = \pi/l$, соответствующее решению уравнения Лапласа $\Delta g = 0$ [5]. Из (3) следует, что с точностью до величины $\sim (\omega/kc)^2$ тангенциальные компоненты вектора $\mathbf{E}$ на поверхности аксиального электрода $I_0(kr_0) = I_0(kr)\cos(kz)$ равны нулю.

В рассматриваемом одномодовом приближении общее решение однородных уравнений Максвелла представим в виде

$$\begin{aligned} &A_r = A_\varphi = 0, \\ &A_0 = c(\varepsilon_0 \omega L)^{-1/2}[a A_0^{(e)}(r, \varphi, z)\exp(-i\omega t) + \text{к.с.}], \\ &A_z = c(\varepsilon_0 \omega L)^{-1/2}[a A_z^{(e)}(r, \varphi, z)\exp(-i\omega t) + \text{к.с.}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $A_0^{(e)}(r, \varphi, z) = \partial g/\partial z$, $\mathbf{A}^{(e)} = (0, 0, i\omega g/c^2)$. Постоянная L, представляющая собой эффективный объем резонатора, определяется из условия

$$\int d^3x < \frac{\varepsilon_0(E^2 + c^2 B^2)}{2} > = \omega a a^*,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, область интегрирования ограничена объемом резонатора.

Гамильтонова форма уравнений движения и поля

Рассмотрим движение N электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем, задаваемым потенциалами

$$A_0^{(ext)}(t, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}), \quad A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}) = V \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\mathbf{A}^{(ext)}(t, \mathbf{x}) = (B/2)(-y, x, 0) + \mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}) = (0, 0, -c^{-2} V \frac{\partial G}{\partial t}),$$

где $G = g\cos\omega t$, $g = (1/k) I_0(kr)\sin(kz)$, и свободным полем, потенциалы которого будем искать в виде (4), предполагая, что коэффициенты a, a^* зависят от времени. Гамильтониан, описывающий эволюцию системы N электронов и поля,

$$\begin{aligned} H = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2m}[\mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(t, \mathbf{x}_a) + e_0 \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)]^2 - \\ - e_0[A_0^{(ext)}(t, \mathbf{x}_a) + A_0(t, \mathbf{x}_a)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Канонические переменные a, ia^* играют роль координат и импульсов [6], фундаментальные скобки Пуассона (СП) $[a, ia^*] = 1$. Каноническое преобразование $a = I^{1/2}\exp(-i\phi)$ позволяет перейти в (5) к действительным координате ϕ и импульсу I с фундаментальной СП $[\phi, I] = 1$. Энергия поля излучения будет иметь вид $\varepsilon(t) = \omega I(t)$.

Гамильтониан H представим в виде $H = H_0 + h$, где

$$H_0 = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2m}[\mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(\mathbf{x}_a)]^2 - e_0 \Phi(\mathbf{x}_a),$$

$$\begin{aligned} h = \sum_{a=1}^{N} - e_0[A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + A_0(t, \mathbf{x}_a) + \mathbf{v}_a \mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + \\ + \mathbf{v}_a \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)] + \frac{e_0^2}{2m}[\mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)]^2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$m\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(\mathbf{x}_a).$$

Запишем гамильтониан H в параксиальном приближении (2). Если пренебречь взаимодействием с полем излучения, то функции $x(t)$, $y(t)$ будут представлять собой параметрические уравнения эпициклоиды с характерными частотами $\omega_{1,2} = (\Omega \pm \omega_{12})/2$, $\omega_{12} = [\Omega^2 - 2\omega_3^2]^{1/2}$, $\Omega = e_0 B/m$, $\omega_3^2 = 2e_0 V_0/(mR^2)$, а функция $z(t)$ будет осциллировать с частотой ω_3. В работе [6] показано, что каноническое преобразование (КП) к новым координатам α_n и импульсам i_n с фундаментальной СП $[\alpha_n, i_k] = \delta_{nk}$:

$$\begin{aligned} &x = \left(\frac{2}{m\omega_{12}}\right)^{1/2} \left[\sqrt{i_1}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{i_2}\cos(\omega_2 t - \alpha_2)\right], \\ &y = \left(\frac{2}{m\omega_{12}}\right)^{1/2} \left[\sqrt{i_1}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{i_2}\sin(\omega_2 t - \alpha_2)\right], \\ &p_x = -\left(\frac{m\omega_{12}}{2}\right)^{1/2} \left[\sqrt{i_1}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \right. \\ &\qquad \left. - \sqrt{i_2}\sin(\omega_2 t - \alpha_2)\right], \\ &p_y = \left(\frac{m\omega_{12}}{2}\right)^{1/2} \left[\sqrt{i_1}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \right. \\ &\qquad \left. - \sqrt{i_2}\cos(\omega_2 t - \alpha_2)\right], \\ &z = \left(\frac{2i_3}{m\omega_3}\right)^{1/2} \cos(\omega_3 t + \alpha_3), \\ &p_z = -(2m\omega_3 i_3)^{1/2}\sin(\omega_3 t + \alpha_3), \end{aligned} \tag{7}$$

позволяет исключить вклад H_0 в полный гамильтониан H. В результате КП новый гамильтониан представляет собой функцию (6), в которой следует произвести замену переменных (7).

Энергия излучения генератора

Рассмотрим вначале излучение электронов в идеальном резонаторе. Найдем энергию поля в случае $\omega \approx \omega_{12} \neq 2\omega_3$, $\omega_{12} \ll c\pi/l$, используя метод усреднения в гамильтоновой форме [6]. Вычисляя среднее значение h, получим в первом приближении метода гамильтониан $h_{av} = <h>$,

$$h_{av} = -\sigma\sum_{a=1}^{N}(i_{1a}i_{2a})^{1/2}(2I)^{1/2}\cos(\delta t+\phi-\alpha_{1a}-\alpha_{2a})- -\theta\sum_{a=1}^{N}(i_{1a}i_{2a})^{1/2}\cos(\delta t-\alpha_{1a}-\alpha_{2a}),$$

$$\sigma = \frac{2e_0c}{m\omega_{12}R^2(2\varepsilon_0\omega L)^{1/2}},\qquad \theta = \frac{e_0V}{m\omega_{12}R^2},\quad \delta=\omega-\omega_{12}, \tag{8}$$

описывающий систему с $(2N+1)$ степенями свободы.

Для исключения явной зависимости гамильтониана от времени произведем КП $\alpha_n = \phi_n+\delta t/2, i_n = I_n$, $(n = 1, 2)$, порождаемое производящей функцией, зависящей от старых координат и новых импульсов:

$$F_2 = \sum_{a=1}^{N}[\alpha_{1a}I_{1a}+\alpha_{2a}I_{2a}-\delta t(I_{1a}+I_{2a})/2].$$

Новый гамильтониан

$$h_c = -\sigma(uq+vp)-\theta u-\delta w. \tag{9}$$

Здесь в качестве полевых координаты q и импульса p введены действительная и мнимая части комплексной амплитуды a:

$$(2I)^{1/2}\cos\phi = q,\quad (2I)^{1/2}\sin\phi = -p,\quad I=\frac{1}{2}(q^2+p^2),$$

и коллективные переменные

$$u = \sum_{a=1}^{N}(I_{1a}I_{2a})^{1/2}\cos(\phi_{1a}+\phi_{2a}),$$

$$v = -\sum_{a=1}^{N}(I_{1a}I_{2a})^{1/2}\sin(\phi_{1a}+\phi_{2a}),$$

$$2w = \sum_{a=1}^{N}(I_{1a}+I_{2a}),$$

характеризующие пространственную конфигурацию электронов. «Радиус» распределения системы электронов относительно оси z

$$\rho^2(t) = \sum_{a=1}^{N}\frac{1}{N}(x_a^2+y_a^2) = \frac{4}{Nm\omega_{12}}[w+(u\cos\omega t+v\sin\omega t)].$$

Очевидно, значения $\rho(t)$ ограничены кольцом $\rho_1 \leqslant \rho(t) \leqslant \rho_2$, где $(\rho^2)_{2,1} = 4[w\pm(u^2+v^2)^{1/2}]/(Nm\omega_{12})$. Среднее значение кинетической энергии электронов $<K> = K_{xy}+K_z$, где

$$K_{xy} = [(\Omega^2+\omega_{12}^2)w+\Omega\omega_{12}r]/(2\omega_{12}),$$

$$K_z = (\omega_3/2)\sum_{a=1}^{N}I_{3a},\ r=\sum_{a=1}^{N}(I_{1a}-I_{2a}), \tag{10}$$

r, K_z — постоянные величины. Выберем начальные условия в виде $q(0) = p(0) = 0$, $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$, $w_0 = w(0)$. Для полной интегрируемости канонической системы уравнений перейдем в (9) к новым переменным $P = p$, $Q = q+Q_0$, $Q_0 = \theta/\sigma$. Тогда получим гамильтониан

$$h_N = -\sigma(uQ+vp)-\delta w. \tag{11}$$

Отметим, что в квантовой теории гамильтониан (11) описывает взаимодействие двухуровневого атома с одной модой поля резонатора [7, 8]. Величина $J = (Q^2+p^2)/2$ представляет собой полную энергию поля, связанную с энергией поля излучения $\varepsilon(t) = \omega I(t)$ соотношением

$$I = J-2(J_0J)^{1/2}\cos\Phi+J_0,\quad J_0=\frac{1}{2}Q_0^2, \tag{12}$$

$$(2J)^{1/2}\cos\Phi = Q,\quad (2J)^{1/2}\sin\Phi = -p.$$

Учитывая значения СП $[u, v] = w$, $[u, w] = v$, $[v, w] = -u$, $[Q, p] = 1$, получим систему канонических уравнений

$$\frac{du}{dt} = -\sigma wp-\delta v,\quad \frac{dv}{dt} = \sigma wQ+\delta u,\quad \frac{dw}{dt} = \sigma(vQ-up), \tag{13}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma v,\quad \frac{dp}{dt} = \sigma u. \tag{14}$$

Первые интегралы системы (13), (14)

$$w+J = E_0,\quad E_0 = w_0+J_0, \tag{15}$$

$$w^2-(u^2+v^2) = S_0,$$

$$S_0 = w_0^2-d^2,\quad d^2 = u_0^2+v_0^2,$$

аналогичны соотношениям Менли–Роу в теории трехволновых взаимодействий [9]. Очевидно, на траекториях системы сохраняется гамильтониан (11):

$$-\sigma(uQ+vp)-\delta w = C,\quad C = -\sigma u_0Q_0-\delta w_0. \tag{16}$$

Теперь система нелинейных уравнений (13), (14) допускает полное интегрирование. Действительно, учитывая (15), (16), правую часть уравнения $dw/dt = \sigma(vQ - up)$ можно представить в виде функции, зависящей от w:

$$\sigma^2(vQ-up)^2 = \\ = 2\sigma^2(E_0 - w)(w^2 - S_0) - (C+\delta w)^2 \equiv -2F(w).$$

В результате получим уравнение

$$\frac{dw}{dt} = [-2F(w)]^{1/2}, \qquad (17)$$

где $F(w) = \sigma^2[(w - E_0)(w^2 - S_0) + (C + \delta w)^2/2$.

Возможны три характерные ситуации.

А. Рассмотрим вначале отклик системы на переменное поле, пренебрегая взаимодействием электронов с электромагнитным полем резонатора. Учитывая значения первых интегралов: $C = -\delta w_0 - \delta\theta u_0$, $E_0 = w_0 + (\theta/\sigma)^2/2$ и полагая $\sigma = 0$, находим $F(w) = F_0(w)$, $F_0(w) = (\delta^2 - \theta^2)w^2/2 + C\delta w + (C^2 + \theta^2 S_0)/2$. Область определения функции $w(t)$ удовлетворяет условиям $F(w) \leqslant 0$, $w > 0$.

Дифференцируя (17), получим линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{dF}{dw}, \quad \frac{d^2w}{dt^2} + (\delta^2 - \theta^2)w = -C\delta,$$

из которого следует, что при $\theta^2 > \delta^2$ реализуется явление параметрического резонанса: $w(t) = C\delta/n^2 + (w_0 - C\delta/n^2)\,\mathrm{ch}(nt)$, $n^2 = \theta^2 - \delta^2$. Согласно (10), кинетическая энергия поперечного движения электронов K_{xy} при $t \gg 1/n$ экспоненциально возрастает. Далее мы покажем, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса.

Б. В общем случае представим функцию $F(w)$ в виде $F(w) = \sigma^2(w - w_0)(w^2 - S_0) + F_0(w)$. Отметим, что при $\delta = 0$ имеем $F(0) = \sigma^2 w_0 S_0 + \theta^2(w_0^2 - v_0^2)/2 > 0$, $F(w_0) = -\theta^2 v_0^2/2$. Функция $F(w)$ обращается в нуль в трех точках: $w = s_1$, $w = s_2$, $w = s_3$. При значениях $\theta^2 < \delta^2$ имеем $0 < s_1 < s_2$, $s_3 < 0$: область значений функции $w(t)$ ограничена интервалом $s_1 \leqslant w \leqslant s_2$. В случае, соответствующем параметрическому резонансу, $\theta^2 > \delta^2$, имеем $0 < s_2 < s_1$, $s_3 < 0$. Следовательно, допустимые значения $w(t)$ в этом случае ограничены неравенством $s_2 \leqslant w \leqslant s_1$. При $\sigma^2 w_0 \ll \theta^2$ величина $s_1 \approx n^2/(2\sigma^2) - 2C\delta/n^2 + w_0$.

Обращая интеграл (17), получим в интервале $s_2 \leqslant w \leqslant s_1$ решение

$$w = s_3 + (s_2 - s_3)\,\mathrm{nd}^2\left[\frac{\Omega_0}{2}(t + t_0), \xi\right],$$

$$\Omega_0 = \sigma[2(s_1 - s_3)]^{1/2}, \quad \xi = \left[\frac{(s_1 - s_2)}{(s_1 - s_3)}\right]^{1/2},$$

где $(s_2 - s_3)\,\mathrm{nd}^2\,[\frac{\Omega_0}{2}t_0, \xi] = w_0 - s_3$, $\mathrm{nd} = \mathrm{dn}^{-1}(\frac{\Omega_0}{2}t, \xi)$, $\mathrm{dn}(\frac{\Omega_0}{2}t, \xi)$ — эллиптическая функция Якоби [10–11]. Следовательно, $J(t) = E_0 - w(t)$ — периодическая функция с периодом $2K/\Omega_0$, где $K(\xi)$ — полный эллиптический интеграл. Энергия электромагнитного поля определяется из соотношения (12), в котором величина $J = E_0 - w$, а функция Φ находится из уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt} = [\Phi, h_N], \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\delta}{2} - \frac{\delta J_0 - \theta u_0}{2(w - w_0 - J_0)}.$$

В. Найдем решение уравнения (17), полагая $\theta = 0$: переменное электрическое поле выключено. Функция $F(w)$ обращается в нуль в точках $s_2 = w_0$,

$$s_{1,3} = -\frac{\delta}{4\sigma^2} \pm \left[\left(\frac{w_0 + \delta^2}{4\sigma^2}\right)^2 - d^2\right]^{1/2}.$$

В этом случае $F(w) < 0$ в области $s_1 < w < w_0$. Решение уравнения (17)

$$w(t) = w_0 - (w_0 - s_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\Omega_d t}{2}, \xi\right),$$

где $\Omega_d = \sigma[2(w_0 - s_3)]^{1/2}$, $\xi = [(w_0 - s_1)/(w_0 - s_3)]^{1/2} = (w_0 - s_1)/d$. Энергия излучения $I = w_0 - w$ представляет собой периодическую функцию с частотой биений $\pi\Omega_d/2K$, фаза поля $\phi(t) = -\delta t/2$.

При увеличении параметра θ корни уравнения $F(w) = 0$ смещаются по оси w. Если $\delta = 0$, то в области $\theta^2 \ll \sigma^2 w_0$ получим значения корней: $w_{1,3} \approx \pm S_0^{1/2} + (1 \pm w_0/S_0^{1/2})(\theta^2/4\sigma^2) + \varepsilon_{1,3}$, $\varepsilon_1 = -(\theta v_0/\sigma d)^2/2$, $\varepsilon_3 = (\theta v_0/2\sigma w_0)^2/2$, $w_2 \approx w_0 + (\theta v_0/\sigma w_0)^2/2$. При значении $\theta = \theta_c$, $\theta_c^2 = (\sigma^2 d^2/w_0)[1 - (v_0/d)^2 - (v_0/w_0)^2]^{-1/2}$ корни w_1 и w_2 совпадают. В области $\theta > \theta_c$ имеем $w_1 > w_2$.

Учет джоулевых потерь и столкновений

Для анализа поведения системы, близкой к реальной, введем в канонические уравнения феноменологические слагаемые с коэффициентами γ и μ, учитывающие рассеяние энергии, обусловленное джоулевыми потерями в стенках резонатора и столкновениями с газом. Система уравнений, порождаемая гамильтонианом (9), приобретает вид

$$\frac{du}{dt} = -\sigma wp - \delta v - 2\mu u, \quad \frac{dv}{dt} = \sigma wq + \theta w + \delta u - 2\mu v, \qquad (18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \sigma(vq - up) + \theta v - 2\mu w, \qquad (19)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma v - \gamma q, \qquad \frac{dp}{dt} = \sigma u - \gamma p. \qquad (20)$$

При $\sigma = 0$ параметрический резонанс реализуется при условии $n_1 > 0$, $n_1 = n - 2\mu$, $n = [\theta^2 - \sigma^2]^{1/2}$.

Из (18)–(19) находим, что функция $S = w^2 - (u^2 + v^2)$ удовлетворяет уравнению $dS/dt = -4\mu S$. Отсюда следует важный вывод: при значениях $t \gg \tau$,

$\tau = 1/4\mu$, выполняется соотношение $u^2+v^2 \approx w^2$, характеризующее самоорганизацию системы электроны–поле. Рассмотрим два характерных режима генерации.

А. Пусть $\gamma \gg \mu$. Тогда при $t > 1/\gamma$ можно применить процедуру адиабатического исключения быстрых переменных q и p, полагая $dq/dt = 0$, $dp/dt = 0$ [12]. Из (20) находим $q = -\sigma v/\gamma, p = \sigma u/\gamma$. Переменные u, v, w играют роль параметров порядка, управляя подсистемой электромагнитного поля. Теперь имеем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}uw - \delta v - 2\mu u, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}vw + \theta w + \delta u - 2\mu v, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}(u^2+v^2) + \theta v - 2\mu w. \end{aligned} \tag{21}$$

Исследуем устойчивость системы (21) в линейном приближении при $n > 2\mu$. В этом случае точка $u = 0$, $v = w = \gamma(\theta - 2\mu)/\sigma^2$, представляет собой устойчивый узел. Энергия поля в резонаторе $\varepsilon = \omega\sigma^2(u^2+v^2)/(2\gamma^2)$. При $t \gg 1/\mu$ имеем $\varepsilon \to \omega(\theta - 2\mu)^2/(2\sigma^2)$, фаза поля $\phi \to \pi$.

Б. Пусть $\mu \gg \gamma$. В теории одномодового лазера это условие позволяет адиабатически исключить устойчивые моды подсистемы атомов и выделить слабозатухающую, виртуально неустойчивую полевую моду, описывающую фазовый переход второго рода [12]. Однако в отличие от случая лазера полевая мода в уравнениях (18)–(20) не проявляет порогового поведения. При $n > 2\mu$ существует нетривиальная особая точка с координатами $u = 0, v = w = \gamma n_1/\sigma^2$, $q = -n_1/\sigma$, $p = 0$, представляющая собой устойчивый узел.

Автор благодарит Ю. Г. Павленко за многочисленные замечания и советы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00957).

Литература

1. *Демельт Х.* // УФН. 1990. **160**, № 12. С. 129.
2. *Пауль В.* // Там же. С. 109.
3. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. М., 1964.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., 1966.
5. *Капица П.Л.* // Электроника больших мощностей. Т. 1. М., 1962. С. 30.
6. *Павленко Ю.Г.* Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М., 1985.
7. *Cummings F.W.* // Phys. Rev. 1965. **140**. P. 1051.
8. *Бетеров И.М., Лернер П.Б.* // УФН. 1990. **159**, № 4. С. 665.
9. *Рабинович М.И., Трубецкой Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М., 1992.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., 1968.
11. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики. Вып. 3. М., 1970. С. 313.
12. *Хакен Г.* Синергетика. М., 1980.

Поступила в редакцию
17.11.97