

К Р А Т К И Е С О О Б Щ Е Н И Я

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ НЕПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ**

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Рассматриваются электромагнитные процессы в непроводящих изотропных неоднородных средах. Характеристики среды существенно изменяются в нескольких направлениях. Для определения электрического и магнитного полей используется асимптотическая методика.

Запишем исходные уравнения макроскопической электродинамики в предположении, что свободные электрические заряды отсутствуют [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_i}{\partial t}, & \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= 0, & \frac{\partial B_i}{\partial x_i} &= 0, \\ D_i &= \varkappa(\xi) E_i, & B_i &= \mu(\xi) H_i. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1)  $H_k, B_k$  и  $E_k, D_k$  — компоненты напряженности и индукции соответственно магнитного и электрического полей,  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви–Чивита. С направлениями изменения коэффициента диэлектрической проницаемости  $\varkappa$  и коэффициента магнитной проницаемости  $\mu$  связываются оси  $x_i$  декартовой прямоугольной системы координат. Существенная зависимость  $\varkappa$  и  $\mu$  от координат учитывается введением «быстрых» переменных [2]: пусть  $\varkappa = \varkappa(\xi), \mu = \mu(\xi)$ , где  $\xi_\alpha = x_\alpha/\varepsilon, \alpha = \overline{1, A}, A = 2$  или  $3, 0 < \varepsilon \ll 1$  — некоторый безразмерный малый параметр.

Функции  $\varkappa(\xi)$  и  $\mu(\xi)$  имеют следующую структуру:  $\varkappa(\xi) = \varkappa_0 + \varkappa_1(\xi), \mu_0 + \mu_1(\xi)$ , где  $\varkappa_0 = \text{const}, \mu_0 = \text{const}$ , функций  $\varkappa_1(\xi), \mu_1(\xi)$  отличны от нуля в некоторой части характерной области среды (например, ячейки периодичности). Подобные свойства среды часто встречаются в практических задачах. Так, при  $A = 2$  коэффициенты  $\varkappa$  и  $\mu$  имеют указанную структуру для цилиндров и труб, изготовленных путем многослойной намотки однородной нити при условии, что расстояния между витками и между слоями меньше толщины нити. При  $A = 3$  коэффициенты  $\varkappa$  и  $\mu$  обладают указанными свойствами в случае мелкодискредного композитного материала, где размеры зерен меньше расстояния между зёрнами.

Функции  $H_k, E_k$ , входящие в (1), ищутся в виде следующих разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$  [2, 3]:

для  $A = 2$

$$\begin{aligned} H_\alpha(x, \xi, t, \varepsilon) &= H_\alpha^0(x, \xi, t) + \varepsilon H_\alpha^1(x, \xi, t) + \dots, \\ H_3(x, \xi, t, \varepsilon) &= \overline{H}_3^0(x, t) + \varepsilon H_3^1(x, \xi, t) + \dots, \\ E_\alpha(x, \xi, t, \varepsilon) &= E_\alpha^0(x, \xi, t) + \varepsilon E_\alpha^1(x, \xi, t) + \dots, \\ E_3(x, \xi, t, \varepsilon) &= \overline{E}_3^0(x, t) + \varepsilon E_3^1(x, \xi, t) + \dots; \end{aligned} \quad (2)$$

для  $A = 3$

$$\begin{aligned} H_\alpha(x, \xi, t, \varepsilon) &= H_\alpha^0(x, \xi, t) + \varepsilon H_\alpha^1(x, \xi, t) + \dots, \\ E_\alpha(x, \xi, t, \varepsilon) &= E_\alpha^0(x, \xi, t) + \varepsilon E_\alpha^1(x, \xi, t) + \dots. \end{aligned} \quad (3)$$

Черта над буквой здесь и далее означает, что соответствующая величина не зависит от  $\xi$ .

Подстановка разложений (2) или (3) в уравнения (1) позволяет получить уравнения относительно  $H_\alpha^0, E_\alpha^0$ :

для  $A = 2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3\alpha\beta} \frac{\partial H_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} &= 0, & \varepsilon_{3\alpha\beta} \frac{\partial E_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\mu H_\alpha^0) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\varkappa E_\alpha^0) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

для  $A = 3$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial H_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} &= 0, & \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial E_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\mu H_\alpha^0) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\varkappa E_\alpha^0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решения уравнений (4), (5) ищутся в форме

$$H_\alpha^0 = \left( \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \overline{H}_\beta^0, \quad E_\alpha^0 = \left( \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \overline{E}_\beta^0. \quad (6)$$

В (6)  $\Phi_\beta, \Psi_\beta$  — функции  $\xi$ , подлежащие определению.

В результате подстановки (6) в (4) или (5) получаются следующие уравнения относительно  $\Phi_\beta, \Psi_\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[ \mu(\xi) \left( \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[ \kappa(\xi) \left( \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения уравнений в частных производных типа (7) в периодических средах в [2] разработана методика, основанная на численном интегрировании уравнений на ячейке периодичности. В настоящей заметке для решения уравнений (7) предлагается следующая итерационная процедура, использующая описанную выше структуру функций  $\mu(\xi), \kappa(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \mu_0 \Delta_\xi \Phi_\beta^{n+1} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[ \mu_1(\xi) \left( \frac{\partial \Phi_\beta^n}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right], \quad \Phi_\beta^0 = 0, \\ \kappa_0 \Delta_\xi \Psi_\beta^{n+1} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[ \kappa_1(\xi) \left( \frac{\partial \Psi_\beta^n}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right], \quad \Psi_\beta^0 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

( $\Delta_\xi$  — оператор Лапласа). Уравнения (8) при каждом  $n$  могут быть решены аналитически стандартными методами математической физики.

После нахождения функций  $\Phi_\beta, \Psi_\beta$ , входящих в (6), из (1), (2), (3), (6) с помощью процедуры осреднения по  $\xi$  получается система уравнений для определения  $\overline{H}_k^0, \overline{E}_k^0$  [3]:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \overline{H}_k^0}{\partial x_j} = \frac{1}{c} \overline{\kappa}_{ij} \frac{\partial \overline{E}_j^0}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \overline{E}_k^0}{\partial x_j} = -\frac{1}{c} \overline{\mu}_{ij} \frac{\partial \overline{H}_j^0}{\partial t}. \quad (9)$$

В уравнениях (9)  $\overline{\kappa}_{ij}, \overline{\mu}_{ij}$  — компоненты осредненных тензоров соответственно диэлектрической и магнитной проницаемости, которые определяются следующими соотношениями [3]:

для  $A = 2$

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_{\alpha\beta} &= \left\langle \kappa \left( \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right\rangle, \quad \overline{\kappa}_{i3} = \overline{\kappa}_{3i} = \langle \kappa \rangle \delta_{i3}, \\ \overline{\mu}_{\alpha\beta} &= \left\langle \mu \left( \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right\rangle, \quad \overline{\mu}_{i3} = \overline{\mu}_{3i} = \langle \mu \rangle \delta_{i3}; \end{aligned} \quad (10)$$

для  $A = 3$

$$\overline{\kappa}_{ij} = \left\langle \kappa \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi_i} + \delta_{ij} \right) \right\rangle, \quad \overline{\mu}_{ij} = \left\langle \mu \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_i} + \delta_{ij} \right) \right\rangle. \quad (11)$$

В (10) и (11) символ  $\langle \dots \rangle$  означает осреднение по  $\xi$ .

Как следует из (10) и (11), осредненные характеристики соответствуют однородной, но, вообще говоря, анизотропной среде.

Таким образом, из (6)–(11) полностью определяются главные члены разложений (2) или (3). Повторение описанной процедуры позволяет найти в случае необходимости и следующие слагаемые в разложениях (2) или (3).

Сходным образом рассчитываются электромагнитные процессы в электропроводных средах. При этом в исходных уравнениях электродинамики в квазистационарном приближении вместо  $D_i$  будут фигурировать компоненты плотности тока, а вместо  $\kappa$  — проводимость среды  $\sigma(\xi)$  [3].

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
3. Моргунов Б.И. Математический анализ физико-механических процессов. М., 1995.

Поступила в редакцию  
10.04.98

УДК 621.372.2

## О КОРНЕВЫХ ВЕКТОРАХ ВОЛНОВОДА СО СЛОЖНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Рассматривается вопрос о полноте системы корневых векторов волновода. Применяется новый подход, сводящий задачу к исследованию линейного операторного пучка. Сформулированы теоремы о полноте корневых векторов пучка и дискретности спектра.

В стандартном подходе к исследованию задачи о модах регулярного волновода со сложным диэлектрическим заполнением возникают значительные трудности при решении проблемы полноты системы корневых векторов волновода. За исключением работ [1] и [2, 3], посвященных достаточно част-

ным случаям, эта задача фактически не исследовалась. Предлагаемый подход к задаче определения мод диэлектрического волновода позволяет рассматривать обобщенную задачу на собственные значения с линейным вхождением спектрального параметра.