В (6) Φ_β, Ψ_β — функции ξ, подлежащие определению.

В результате подстановки (6) в (4) или (5) получаются следующие уравнения относительно Φ_β, Ψ_β:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[\mu(\xi)\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right]=0,\\ &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[\varkappa(\xi)\left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right]=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Для решения уравнений в частных производных типа (7) в периодических средах в [2] разработана методика, основанная на численном интегрировании уравнений на ячейке периодичности. В настоящей заметке для решения уравнений (7) предлагается следующая итерационная процедура, использующая описанную выше структуру функций $\mu(\xi)$, $\varkappa(\xi)$:

$$\begin{aligned} &\mu_0\Delta_\xi\Phi_\beta^{n+1}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\mu_1(\xi)\left(\frac{\partial\Phi_\beta^n}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right], \quad \Phi_\beta^0=0,\\ &\varkappa_0\Delta_\xi\Psi_\beta^{n+1}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\varkappa_1(\xi)\left(\frac{\partial\Psi_\beta^n}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right], \quad \Psi_\beta^0=0 \end{aligned} \tag{8}$$

(Δ_ξ — оператор Лапласа). Уравнения (8) при каждом n могут быть решены аналитически стандартными методами математической физики.

После нахождения функций Φ_β, Ψ_β, входящих в (6), из (1), (2), (3), (6) с помощью процедуры осреднения по ξ получается система уравнений для определения $\overline{H}_k^0$, $\overline{E}_k^0$ [3]:

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{H}_k^0}{\partial x_j}=\frac{1}{c}\overline{\varkappa}_{ij}\frac{\partial\overline{E}_j^0}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{E}_k^0}{\partial x_j}=-\frac{1}{c}\overline{\mu}_{ij}\frac{\partial\overline{H}_j^0}{\partial t}. \tag{9}$$

В уравнениях (9) $\overline{\varkappa}_{ij}, \overline{\mu}_{ij}$ — компоненты осредненных тензоров соответственно диэлектрической и магнитной проницаемости, которые определяются следующими соотношениями [3]:

для $A=2$

$$\begin{aligned} &\overline{\varkappa}_{\alpha\beta}=\left\langle\varkappa\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right\rangle, \quad \overline{\varkappa}_{i3}=\overline{\varkappa}_{3i}=<\varkappa>\delta_{i3},\\ &\overline{\mu}_{\alpha\beta}=\left\langle\mu\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right\rangle, \quad \overline{\mu}_{i3}=\overline{\mu}_{3i}=<\mu>\delta_{i3}; \end{aligned} \tag{10}$$

для $A=3$

$$\overline{\varkappa}_{ij}=\left\langle\varkappa\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_i}+\delta_{ij}\right)\right\rangle, \quad \overline{\mu}_{ij}=\left\langle\mu\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi_i}+\delta_{ij}\right)\right\rangle. \tag{11}$$

В (10) и (11) символ $\langle\cdots\rangle$ означает осреднение по ξ.

Как следует из (10) и (11), осредненные характеристики соответствуют однородной, но, вообще говоря, анизотропной среде.

Таким образом, из (6)–(11) полностью определяются главные члены разложений (2) или (3). Повторение описанной процедуры позволяет найти в случае необходимости и следующие слагаемые в разложениях (2) или (3).

Сходным образом рассчитываются электромагнитные процессы в электропроводных средах. При этом в исходных уравнениях электродинамики в квазистационарном приближении вместо D_i будут фигурировать компоненты плотности тока, а вместо $\varkappa$ — проводимость среды $\sigma(\xi)$ [3].

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
3. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико-механических процессов. М., 1995.

Поступила в редакцию
10.04.98

УДК 621.372.2

О КОРНЕВЫХ ВЕКТОРАХ ВОЛНОВОДА СО СЛОЖНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Рассматривается вопрос о полноте системы корневых векторов волновода. Применяется новый подход, сводящий задачу к исследованию линейного операторного пучка. Сформулированы теоремы о полноте корневых векторов пучка и дискретности спектра.

В стандартном подходе к исследованию задачи о модах регулярного волновода со сложным диэлектрическим заполнением возникают значительные трудности при решении проблемы полноты системы корневых векторов волновода. За исключением работ [1] и [2, 3], посвященных достаточно частным случаям, эта задача фактически не исследовалась. Предлагаемый подход к задаче определения мод диэлектрического волновода позволяет рассматривать обобщенную задачу на собственные значения с линейным вхождением спектрального параметра.

Будем рассматривать следующий класс задач. Введем декартову систему координат. Ось z направим вдоль оси волновода. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x, y)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, магнитная проницаемость $\mu \equiv 1$. В целях упрощения считаем, что сечение волновода D — прямоугольник. Воспользуемся системой уравнений Максвелла, описывающей электромагнитное поле в волноводе:

$$\mathrm{rot} E = ikH, \qquad \mathrm{rot} H = -ik\varepsilon E,$$

$$\mathrm{div} H = 0, \qquad \mathrm{div}\varepsilon E = 0.$$

Для постановки задачи возьмем те шесть из уравнений Максвелла, в которые входят производные по z. Оставшиеся два уравнения будем рассматривать в качестве дополнительных дифференциальных условий, выделяющих функциональное пространство, в котором производится поиск решения. Будем искать решения уравнений Максвелла вида

$$Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{i\beta z} Y_k, \tag{1}$$

где $Y = (H_x, H_y, E_z)^T$ или $Y = (D_x D_y H_z)^T$, $D = \varepsilon E$.

Запишем систему уравнений в следующем виде:

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial}{\partial z} A_2, \tag{2}$$

$$a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial}{\partial z} A_1, (x, y) \in D, z \in (-\infty, \infty), \tag{3}$$

где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \varepsilon^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$A_1 = (H_x, H_y, E_z)^T, A_2 = (D_x, D_y, H_z)^T. \tag{6}$$

Дополним уравнения (2)–(3) граничными условиями на идеально проводящей стенке ∂D и условиями сопряжения на линиях разрыва диэлектрической проницаемости C:

$$(Hn)\mid_{\partial D} = 0, \quad E_z \mid_{\partial D} = 0, \tag{7}$$

$$[(Hn)]|_C = 0, \quad [E_z]|_C = 0, \tag{8}$$

$$[(Dn)]|_C = 0, \quad [H_z]|_C = 0, \tag{9}$$

где n — вектор нормали к ∂D. После сокращения на множители, зависящие от координаты z, приходим к системе уравнений для корневых векторов:

$$a_1 A_{1_i} = i\beta d_1 A_{2_i}, \ \ a_1 A_{1_{i+1}} = i\beta d_1 A_{2_{i+1}} + d_1 A_{2_i}, \tag{10}$$

$$a_2 A_{2_i} = i\beta d_2 A_{1_i}, \ \ a_2 A_{2_{i+1}} = i\beta d_2 A_{1_{i+1}} + d_2 A_{1_i}, \tag{11}$$

где $(x, y) \in D$ и векторы A_1 и A_2 удовлетворяют граничным условиям и условиям сопряжения (7)–(9). В качестве решения пока рассматриваем классическое. Задача (10)–(11) эквивалентна задаче для квадратичного операторного пучка, в качестве спектрального параметра которого выступает постоянная распространения β:

$$M(\beta) = a_2 d_1^{-1} a_1 + \beta^2 d_2. \tag{12}$$

Теорема 1. *Корневые векторы квадратичного пучка $M(\beta)$ и линейного операторного пучка $M(\beta^2)$, в качестве спектрального параметра которого выступает β^2, связаны линейными соотношениями.*

В матричной записи оператор $a_2 d_1^{-1} a_1$ принимает следующую форму:

$$a_2 d_1^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\varepsilon & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -ik\varepsilon\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\varepsilon & ik\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} \\ ik\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon & -ik\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon & -\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу для линейного операторного пучка. Особенностью задачи является наличие бесконечномерного ядра вида

$$\Psi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial x}, ik\phi\right)^T, \tag{13}$$

где $\phi \in \dot{W}_2^1$. Корневые векторы, отвечающие ненулевому β, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + ik\varepsilon E_z = 0, \tag{14}$$

являющемуся одним из не использованных нами уравнений Максвелла. Будем рассматривать задачу на собственные значения:

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1_i} = \beta^2 d_2 A_{1_i}, \tag{15}$$

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1_{i+1}} = \beta^2 d_2 A_{1_{i+1}} + d_2 A_{1_i}. \tag{16}$$

Для вектора A_1 поставим граничные условия (7), условия сопряжения (8) и условия сопряжения, следующие из (9), вида

$$\left[\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right]|_C = 0, \tag{17}$$

$$\left[\varepsilon\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - ikH_x\right)n_x\right]|_C + \left[\varepsilon\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + ikH_y\right)n_y\right]|_C = 0. \tag{18}$$

Введем векторное пространство V:

$$V = \Big(H_x \in W_2^1, \ \ H_y \in W_2^1, \ \ E_z \in \dot{W}_2^1,$$

$$(Hn)|_{\partial D} = 0, \ \ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + ik\varepsilon E_z\Big) = 0$$

и построим билинейные формы над V:

$$a(A,\widetilde{A}) = \int_D \Big(\mathrm{div}_- H_- \mathrm{div}_- \widetilde{H}^*_- + \mathrm{grad} E_z \mathrm{grad} \widetilde{E}^*_z + \\ + (\lambda_0 - k^2\varepsilon) H_- \widetilde{H}^*_- + \lambda_0 \varepsilon E_z \widetilde{E}^*_z\Big)\, dS, \tag{19}$$

$$b(A,\widetilde{A}) = \int_D \left(-ik\varepsilon \widetilde{H}^*_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik\varepsilon \widetilde{H}^*_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \\ + ik\varepsilon \widetilde{H}_x \frac{\partial \widetilde{E}^*_z}{\partial y} - ik\varepsilon \widetilde{H}_y \frac{\partial \widetilde{E}^*_z}{\partial x}\right) dS, \tag{20}$$

$$c(A,\widetilde{A}) = \int_D \left(H_- \widetilde{H}^*_-\right) dS. \tag{21}$$

Рассмотрим спектральную задачу

$$a(A,\widetilde{A}) + b(A,\widetilde{A}) = (\lambda_0 - \beta^2) c(A,\widetilde{A}), \quad \forall \widetilde{A} \in V \tag{22}$$

для собственных функций и аналогичное уравнение для присоединенных функций. В качестве спектрального параметра будем рассматривать $\lambda = \lambda_0 - \beta^2$, где $\lambda_0 > k^2 \max\limits_{(x,y)\in D} \varepsilon$.

Основными результатами являются следующие утверждения. Задача (22) эквивалентна задаче

$$(I+T)A = \lambda H A, \tag{23}$$

где операторы T, H определяются по теореме Рисса, в качестве скалярного произведения в пространстве V рассматривается $a(A,\widetilde{A})$. Операторы T и H отображают V на V, компактны, оператор H — самосопряженный. Кроме того, оператор H — полный оператор конечного порядка, т. е. существует p такое, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n^p < \infty$, где μ_n — собственные значения H.

Приведенные выше утверждения дают возможность применить к операторному пучку (23) теорему Келдыша [4] о полноте корневых векторов операторного пучка, и в результате имеет место

Т е о р е м а 2. *Система корневых векторов задачи* (22) *полна в пространстве* V.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01081).

Литература

1. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // ДАН. 1982. **264**, № 5. С. 1123.
2. *Смирнов Ю.Г.* // ДАН. 1987. **297**, № 4. С. 829.
3. *Смирнов Ю.Г.* // Дифф. уравнения. 1991. **27**, № 1. С. 140.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.

Поступила в редакцию
09.01.98

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.04

ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В СЛАБО УПОРЯДОЧНОЙ СРЕДЕ

В. С. Блажевич, В. К. Гришин, Б. С. Ишханов, Н. Н. Насонов, В. П. Петухов, А. С. Чепурнов, В. И. Шведунов

(*НИИЯФ*)

Обсуждаются результаты экспериментальных исследований поляризационного, или атомного, тормозного излучения электронов с энергией 2,4 МэВ в слабо упорядочной среде — сусальном алюминии с аморфоподобной структурой. Измерения проведены на линейном ускорителе НИИЯФ МГУ. Отмечается удовлетворительное согласие полученных данных и результатов теоретических оценок.

Введение

Поляризационное, или атомное, тормозное излучение (ПТИ) возникает в процессе столкновения быстрой заряженной частицы с атомом вследствие рассеяния кулоновского поля налетающей частицы на атомных электронах [1]. В наиболее интересной для различных приложений области энергий рентгеновских фотонов 1–10 кэВ это излучение приобретает коллективный характер, поскольку процесс рассеяния когерентно «охватывает» все атомные электроны. Благодаря последнему обстоятельству интегральные по углам интенсивности ПТИ и традиционного тормозного излучения (ТИ) становятся сравнимыми в указанной области энергии фотонов.

Однако особенностью ПТИ, радикально отличающейся от ТИ, возникающего в этом же столкновении, является большая величина эффективного параметра столкновения, сравнимая с размером атома (для ТИ характерны малые прицельные параметры, которые имеют величину порядка радиуса экранирования в атомной модели Томаса–Ферми). Поэтому существенное влияние на свойства ПТИ в конденсированной среде, в которой расстояния между атомами имеют величину порядка атомных размеров, долж-