ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ТЕОРЕТИКО-ВОЗМОЖНОСТНЫЙ МЕТОД РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Дано решение задачи редукции измерения к идеальному прибору, основанное на теоретико-возможностной модели.

Введение

Пусть в эксперименте измеряется

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

— искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}$ выходной сигнал Af прибора A, на вход которого поступил сигнал $f \in \mathcal{F}$ от измеряемого объекта и среды, $Uf \in \mathcal{U}$ — параметры исследуемого объекта, $A: \mathcal{F} \to \mathcal{R}$, $U: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ — заданные операторы, первый моделирует измерительный прибор, второй моделирует связь между сигналом f, поступающим от измеряемого объекта и среды, и параметрами исследуемого объекта, не возмущенного измерением, $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ — конечномерные евклидовы пространства [1]. В рассматриваемой в этой работе задаче интерпретации измерения (1) требуется определить стратегию оценивания (интерпретации) $d(\cdot): \mathcal{R} \to \mathcal{U}$ так, чтобы элемент $d(\xi)$ можно было считать наиболее точной версией значения Uf параметров исследуемого объекта.

Оператор U моделирует то, что в экспериментальных исследованиях называется идеальным измерительным прибором, на его выходе исследователь получает значения параметров исследуемого объекта, свойственные его состоянию, не искаженному измерением; рассматриваемая задача называется задачей редукции измерения к идеальному прибору [1].

Для решения задачи редукции должна быть задана модель схемы измерения (1). В этой работе даны решения задачи редукции для теоретико-возможностных моделей, аналогичных теоретико-вероятностным моделям $[A, \Sigma]$ и $[A, F, f_0, \Sigma]$, в которых шум ν определен как случайный элемент $\mathcal{R}$ с математическим ожиданием $\mathbf{E}\,\nu = 0$ и ковариационным оператором $\Sigma: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, причем в модели $[A, \Sigma]$ f считается априори произвольным элементом $\mathcal{F}$, а в $[A, F, f_0, \Sigma]$ f — случайный элемент $\mathcal{F}$, $f_0 = \mathbf{E}\, f$, $F: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — ковариационный оператор f [1].

Решение задач редукции для этих моделей приведены в работах [1–3].

1. Редукция измерения (1) в случае априори произвольного сигнала f

Пусть ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}$, $\varphi^{\nu}(\cdot): \mathcal{R} \to [0,1]$ — распределение ν, тогда ξ в (1) — также нечеткий элемент $\mathcal{R}$, $\varphi^{\xi}(x,f) = \varphi^{\nu}(x - Af)$, $x \in \mathcal{R}$, — распределение ξ, зависящее от $f \in \mathcal{F}$ как от параметра, который в этом пункте считается априори произвольным элементом $\mathcal{F}$ [4]. Введем нечеткое отношение погрешности $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, l(\cdot,\cdot))$, в котором $l(Uf, u)$ — возможность ошибки, сопутствующей выбору $u \in \mathcal{U}$ в качестве значений параметров Uf исследуемого объекта для каждого значения $f \in \mathcal{F}$ входного сигнала [5].

Охарактеризуем качество стратегии $d(\cdot): \mathcal{R} \to \mathcal{U}$ оценивания функции Uf параметра $f \in \mathcal{F}$ распределения $\varphi^{\xi}(x,f) = \varphi^{\nu}(x - Af)$, $x \in \mathcal{R}$, величиной необходимости ошибки оценивания [5]

$$M(d(\cdot)) = \neg \sup_{x \in \mathcal{R}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\varphi^{\nu}(x - Af), \neg l(Uf, d(x))). \tag{2}$$

N-оптимальную стратегию $d^*(\cdot)$ определим из условия $M(d^*(\cdot)) = \min\limits_{d(\cdot): \mathcal{R} \to \mathcal{U}} M(d(\cdot))$. Эта задача аналогична задачам N-оптимального оценивания, рассмотренным в работе [4], согласно которой N-оптимальную стратегию $d^*(x)$, $x \in X$, можно найти, решив для каждого $x \in \mathcal{R}$ более простую задачу

$$\neg M(d,x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\varphi^{\nu}(x - Af), \neg l(Uf, d)) \sim \max_{d \in \mathcal{U}}. \tag{3}$$

Рассмотрим важный частный случай задачи (3), в котором

$$l(u,v) = l^0(u,v) = \begin{cases} > 0, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases} \quad u, v \in \mathcal{U}. \tag{4}$$

Так как $\max\limits_{d \in \mathcal{U}} \neg l(Uf, d) = 1$ достигается при единственном $d = Uf$, то $\max\limits_{d \in \mathcal{U}} \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \min(\varphi^{\nu}(x - Af), \neg l(Uf, x)) = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \min(\varphi^{\nu}(x - Af), \max\limits_{d \in \mathcal{U}} \neg l(Uf, d)) = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \varphi^{\nu}(x - Af)$. Следовательно, $d^*(x) = Uf(x)$, где $f(x)$ — оценка f максимальной возможности [5]: $\varphi^{\nu}(x - Af(x)) = \max\limits_{f \in \mathcal{F}} \varphi^{\nu}(x - Af)$.

Пусть $\varphi^{\nu}(\cdot) = \rho(||\Sigma^{-1/2} \cdot ||)$, где $\Sigma: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ — положительно определенный оператор (аналог корреляционного оператора ошибки измерения в модели

$[A, \Sigma])$, $\rho(\cdot){:}\,[0,\infty)\to[0,1]$ — непрерывная строго монотонно убывающая функция, задающая распределение нечеткого вектора ошибки $\nu\in\mathcal{R}$, $\rho(0)=1$. При таких предположениях задача (3) эквивалентна задаче отыскания оценки максимальной возможности [5] параметра $f\in\mathcal{F}$ при $\xi=x$ как решения задачи на минимум

$$\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|\sim\min_{f\in\mathcal{F}}, \tag{5}$$

и последующего определения $d^*(x)=Uf(x)$, где $f(x)$ — значение f, на котором минимум в (5) достигается. Обозначим $\Sigma^{-1/2}x=y, \Sigma^{-1/2}A=B$ и B^- — оператор, псевдообратный к B [6]. Так как при любом $f\in\mathcal{F}$

$$\begin{gathered}\|y-Bf\|^2=\|B(B^-y-f)\|^2+\|(I-BB^-)y\|^2\geqslant\\ \geqslant\|(I-BB^-)y\|^2,\end{gathered} \tag{6}$$

причем равенство в (6) достигается при*) $f=B^-y+$ $+b$, где b — любой вектор из ядра $\mathcal{N}(B)$ оператора B (т.е. такой, что $Bb=0$) [6], то минимум в задаче (5) достигается при $f=f(x)=(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}x+b$ и, следовательно,

$$d^*=d^*(x)=Uf(x)=U(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}x+Ub. \tag{7}$$

Если $\mathcal{N}(B)\subset\mathcal{N}(U)$, то $Ub=0$ для любого $b\in\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(A)$ и равенство (7) определяет единственную N-оптимальную стратегию, согласно которой N-оптимальной оценкой $d^*(\xi)$ значения Uf является нечеткий элемент

$$d^*(\xi)=U(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}\xi. \tag{8}$$

Любопытно, что такая же формула определяет наилучшую в среднем квадратичном линейную минимаксную оценку Uf, если в равенстве $\xi=Af+\nu$ шум ν является случайным элементом $\mathcal{R}$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором Σ [1].

Если равенство $Bb=0$ не влечет $Ub=0$, то N-оптимальная стратегия $d^*(\cdot)$ не единственна:

$$d^*(\xi)=U(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}\xi+Ua(\xi), \tag{9}$$

где $a(\cdot){:}\,\mathcal{R}\to\mathcal{N}(A)$ — произвольная функция, принимающая значения в $\mathcal{N}(A){:}\ Aa(x)=0, x\in\mathcal{R}$. Стохастический аналог оценки (9) при таких условиях не существует [6].

При стратегиях (8), (9) необходимость ошибки $M(d^*(\cdot))=\neg\sup_{x\in X}\rho(\|(I-\Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\times$ $\times\Sigma^{-1/2}x\|)=0$. Точная верхняя грань здесь равна единице и достигается на любом $x\in\mathcal{R}(A)$ (из пространства значений $\mathcal{R}(A)$ оператора A).

Подведем итоги.

Т е о р е м а 1. *Пусть в схеме измерения* (1) $A{:}\,\mathcal{F}\to\mathcal{R}$ *— заданный линейный оператор,* f *— априори произвольный элемент* $\mathcal{F}$, ν *— нечеткий элемент* $\mathcal{R}$, $\varphi^\nu(\cdot){:}\,\mathcal{R}\to[0,1]$ *— распределение* ν, *т.е. пусть задана модель* $[A,\varphi^\nu(\cdot)]$ *схемы измерения* (1). *Если* $\varphi^\nu(x)=\rho(\|\Sigma^{-1/2}x\|^2)$, *где* $\Sigma{:}\,\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ *— положительно определенный оператор,* $\rho(\cdot){:}\,[0,\infty)\to[0,1]$ *— непрерывная строго монотонно убывающая функция,* $\rho(0)=1$, *то* N*-оптимальной оценкой* Uf, *где* $U{:}\,\mathcal{F}\to\mathcal{U}$ *— заданный линейный оператор, является любой нечеткий элемент* $\mathcal{U}$ *(9), минимизирующий необходимость ошибки оценивания* (2), *где нечеткое отношение погрешности задано любой функцией* $l(\cdot,\cdot){:}\,\mathcal{U}\times\mathcal{U}\to[0,1]$, *удовлетворяющей условию* (4). *В* (9) $a(\cdot){:}\,\mathcal{R}\to\mathcal{N}(A)$ *— произвольная функция; если (и только если)* $\mathcal{N}(A)\subset\mathcal{N}(U)$, *то* N*-оптимальной оценкой* Uf *является единственный нечеткий элемент* (8). *Для любой оценки* (9) *необходимость ошибки оценивания равна нулю.*

З а м е ч а н и е. Если качество оценивания охарактеризовать значением возможности $L(d(\cdot))=\sup_{x\in\mathcal{R},f\in\mathcal{F}}\min\left(\varphi^\nu(x-Af),l(Uf,d(x))\right)$ ошибки и оптимальную стратегию определить из условия $L(d(\cdot))\sim\min_{d(\cdot)}$, то любая стратегия $d^*(\cdot)$ (9) будет и P-оптимальной, если $l(u,v)=l_0(u,v)=$ $=\begin{cases}0 & \text{при } u=v;\\ 1 & \text{при } u\neq v,\end{cases}$ $u,v\in\mathcal{U}$, хотя при этом возможность ошибки $L(d^*(\cdot))=\sup_{x\in\mathcal{R}}\sup_{f\in\mathcal{F}}\min(\varphi^\nu(x-$ $-Af),l(Uf,d^*(\cdot)))=1$.

2. Редукция измерения (1) при наличии априорной информации о сигнале $f\in\mathcal{F}$

Рассмотрим задачу редукции измерения (1), в которой не только шум ν, но и сигнал f описывается как нечеткий элемент. Обозначим его φ и запишем схему измерения (1) в виде

$$\xi=A\varphi+\nu. \tag{1*}$$

Пусть в (1^*) $A{:}\,\mathcal{F}\to\mathcal{R}$ — линейный оператор, $\varphi\in\mathcal{F}$ и $\nu\in\mathcal{R}$ — независимые нечеткие элементы, принимающие значения в евклидовых пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$, $\pi^\varphi(\cdot){:}\,\mathcal{F}\to[0,1]$ и $\pi^\nu(\cdot){:}\,\mathcal{R}\to[0,1]$ — их распределения, короче говоря, пусть задана теоретико-возможностная модель $[A,\pi^\varphi(\cdot),\pi^\nu(\cdot)]$ схемы измерения (1^*). Обозначим $U\varphi$ нечеткий вектор параметров исследуемого объекта, $U{:}\,\mathcal{F}\to\mathcal{U}$ — заданный линейный оператор, определяющий модель интерпретации измерения ξ [1].

В задаче редукции измерения (1^*) требуется определить стратегию $d(\cdot){:}\,\mathcal{R}\to\mathcal{U}$ оценивания $U\varphi$ так, чтобы нечеткий вектор $d(\xi)$ можно было считать самой точной версией (оценкой) нечеткого вектора $U\varphi$.

*) B^- и B^* — операторы: псевдообратный к B и сопряженный с B соответственно.

Качество стратегии $d(\cdot)$ оценивания охарактеризуем величиной необходимости ошибки оценивания [5]:

$$M(d(\cdot)) = \neg \sup_{x\in\mathcal{R},\, f\in\mathcal{F}} \min(\pi^\nu(x-Af), \pi^\varphi(f), \neg l(Uf, d(x))) = \inf_{x\in\mathcal{R},\, f\in\mathcal{F}} \max(\neg\pi^\nu(x-Af), \neg\pi^\varphi(f), l(Uf, d(x))). \tag{10}$$

Заметим, что если $\pi^\varphi(f)=1$, $f\in\mathcal{F}$, т.е. если все значения сигнала φ в (1*) одинаково возможны, то в (10) $M(d(\cdot)) = \neg \sup\limits_{x\in\mathcal{R},\, f\in\mathcal{F}} \min(\pi^\nu(x-Af), \neg l(Uf, d(x)))$ совпадает с выражением $M(d(\cdot))$ (2), отвечающим случаю априори произвольного сигнала $f\in\mathcal{F}$ в (1).

Заметим также, что $\pi^{\xi|\varphi}(x|f) = \varphi^\nu(x-Af)$ — условная возможность равенства $\xi = x$ при условии $\varphi = f$, т.е. $\pi^{\xi|\varphi}(\cdot|f)$ — условное распределение нечеткого элемента ξ при условии $\varphi = f$. Поэтому

$$\pi^{\xi,\varphi}(x,f) = \min(\pi^{\xi|\varphi}(x|f), \pi^\varphi(f)), \quad x\in\mathcal{R},\ f\in\mathcal{F}, \tag{11}$$

— совместное распределение входного сигнала φ и результата измерения ξ, ($\pi^{\xi,\varphi}(x,f)$ — возможность равенств $\xi = x$ и $\varphi = f$), а необходимость ошибки (10) $M(d(\cdot)) = \inf\limits_{x\in\mathcal{R}, f\in\mathcal{F}} \max(\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf, d(x)))$, ибо согласно (11) $\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f) = \max(\neg\pi^{\xi|\varphi}(x|f), \neg\pi^\varphi(f))$.

N-оптимальную стратегию $d^*(\cdot)$ определим условием

$$M(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot):\mathcal{R}\to\mathcal{U}} M(d(\cdot)), \tag{12}$$

согласно которому при использовании стратегии $d^*(\cdot)$ необходимость ошибки оценивания $U\varphi$ посредством $d^*(\xi)$ минимальна.

Как известно [3], для решения задачи (12) достаточно при каждом $x\in\mathcal{R}$ решить более простую задачу $M(d,x) = \inf\limits_{f\in\mathcal{F}} \max(\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d)) \sim \min\limits_{d\in\mathcal{U}}$, так как решение $d^* = d^*(x)$ такой задачи являтся решением задачи (12). Речь, таким образом, идет о следующей задаче на минимум:

$$\max(\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}, d\in\mathcal{U}}. \tag{13}$$

Далее будем считать, что $l(\cdot,\cdot)$ в (13) удовлетворяет условию (4). Это означает, что только при $d = Uf$ ошибка невозможна. А так как

$$\min_{d\in\mathcal{U}} \max(\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d)) = \max(\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f), \min_{d\in\mathcal{U}} l(Uf,d)) = \neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f),$$

причем минимум по d достигается при (единственном) $d = Uf$, то задача (13) эквивалентна задаче

$$\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f) \sim \min_{f\in\mathcal{F}}, \tag{14}$$

ибо $d^* = d^*(x) = Uf(x)$ в точке $f = f(x)$ минимума $\neg\pi^{\xi,\varphi}(x,f)$.

Пусть $\neg\pi^\nu(x-Af) = \vartheta_1(\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2)$, $\neg\pi^\varphi(f) = \vartheta_2(\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2)$, $f\in\mathcal{F}$, $x\in\mathcal{R}$, где $\vartheta_1(\cdot), \vartheta_2(\cdot)$ — строго монотонно возрастающие, непрерывно дифференцируемые на $[0,\infty)$ функции, принимающие значения в [0,1], $\vartheta_i(0) = 0$, $i = 1,2$, $\Sigma: \mathcal{R}\to\mathcal{R}$ и $F: \mathcal{F}\to\mathcal{F}$ — положительно определенные операторы, играющие роль, аналогичную роли ковариационных операторов ошибки и входного сигнала соответственно в модели измерений $[A,\ F,\ f_0,\ \Sigma]$. Рассмотрим задачу (14) в этом случае:

$$\max(\vartheta_1(\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2), \vartheta_2(\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\ x\in\mathcal{R}. \tag{15}$$

Введем обозначения: $z = F^{-1/2}(f-f_0)$, $B = \Sigma^{-1/2}AF^{1/2}: \mathcal{F}\to\mathcal{R}$, $y = \Sigma^{-1/2}x - \Sigma^{-1/2}Af_0$, в которых задача (15) имеет вид

$$\max(\vartheta_1(\|y-Bz\|^2), \vartheta_2(\|z\|^2)) \sim \min_{z\in\mathcal{F}}. \tag{15*}$$

Для решения задачи (15) вычислим градиенты ϑ_1 и ϑ_2 по $z\in\mathcal{F}$:

$$\nabla\vartheta_1(\|y-Bz\|^2) = \vartheta_1'(\|y-Bz\|^2)B^*(Bz-y),$$
$$\nabla\vartheta_2(\|z\|^2) = \vartheta_2'(\|z\|^2)z.$$

Здесь $\vartheta_1'(\|y-Bz\|^2) = d\vartheta_1(r)/dr|_{r=\|y-Bz\|^2}$, $\vartheta_2'(\|z\|^2) = d\vartheta_2(r)/dr|_{r=\|z\|^2}$. В точке $z = z^*$ минимума (15*) должны быть выполнены следующие условия [7]:

либо для некоторого $\alpha\in[0,1]$

$$\alpha\nabla\vartheta_1(\|y-Bz^*\|^2) + (1-\alpha)\nabla\vartheta_2(\|z^*\|^2) = 0,\quad \vartheta_1(\|y-Bz^*\|^2) = \vartheta_2(\|z^*\|^2); \tag{16}$$

либо

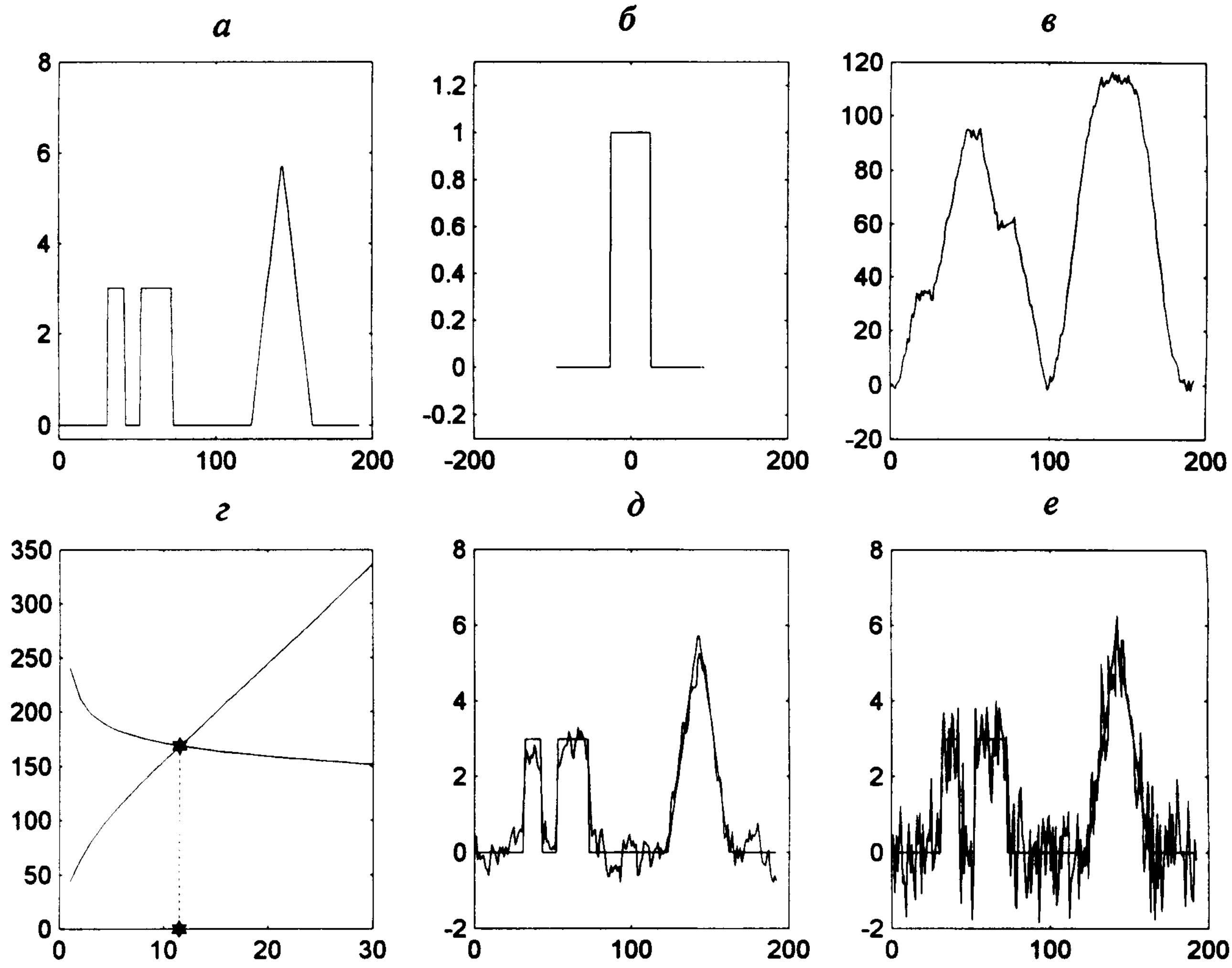
$$\nabla\vartheta_1(\|y-Bz^*\|^2) = 0,\ \vartheta_1(\|y-Bz^*\|^2) > \vartheta_2(\|z^*\|^2); \tag{17}$$

либо, наконец,

$$\nabla\vartheta_2(\|z^*\|^2) = 0,\ \vartheta_1(\|y-Bz^*\|^2) < \vartheta_2(\|z^*\|^2). \tag{18}$$

Рассмотрим первый случай. Согласно первому условию (16) $\alpha\vartheta_1'B^*(Bz^*-y) + (1-\alpha)\vartheta_2'z^* = 0$, откуда следует, что при $\alpha\in[0,1]$ $z^* = z(\gamma) = (B^*B + \gamma I)^{-1}B^*y$, где $\gamma = (1-\alpha)\vartheta_2'/(\alpha\vartheta_1')$ (и соответственно $\alpha\in(0,1)$) определяется из второго условия (16). Пусть для простоты далее $\vartheta_1(\cdot) = \vartheta_2(\cdot) = \vartheta(\cdot)$, где $\vartheta(\cdot): [0,\infty)\to[0,1]$ — строго монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция. В таком случае второе условие (16) эквивалентно равенству

$$\|y-Bz^*\|^2 = \|z^*\|^2. \tag{19}$$



Редукция измерения для теоретико-возможностной модели $[A,\ \pi^{\varphi}(\cdot),\ \pi^{\nu}(\cdot)]$ и для теоретико-вероятностной модели $[A,\ F,\ f_0,\ \Sigma]$: *а* — измеряемые в (1) и (1*) сигналы f и φ соответственно; *б* — аппаратная функция $a(i)$, $i = -192, \ldots, 192$, измерительного прибора A; $(Af)(i) = \sum\limits_{j=1}^{192} a(i-j)f(j), i = 1, \ldots, 192$; *в* — результат измерения в (1) и (1*) $\xi(i) = (Af)(i) + \nu(i), i = 1, \ldots, 192$; *г* — левая и правая части равенства (19) как функции $\sigma^2\gamma$; на горизонтальной оси отмечено значение $\sigma^2\omega(\xi)$; *д* — теоретико-возможностная редукция измерения (1*) $\hat{\varphi} = f_0 + FA^*(AFA^* + \omega(\xi)\Sigma)^{-1}(\xi - Af_0)$, минимизирующая необходимость ошибки оценивания, $\Sigma = \sigma^2 I$, $F = \beta^2 I$, $\sigma^2 = 2$, $\beta^2 = 2,62$; *е* — теоретико-вероятностная редукция измерения (1) $\hat{f} = f_0 + FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}(\xi - Af_0)$, $\Sigma = \sigma^2 I$, $F = \beta^2 I$, минимизирующая среднеквадратичную ошибку оценивания $\mathbf{E}\,||\hat{f} - f||^2 = \min\limits_{R:\mathcal{R}\to\mathcal{F}, r\in\mathcal{F}} \mathbf{E}\,||R\xi + r - f||^2$, $\sigma^2 = 2$, $\beta^2 = 2,62$

Так как $||y - Bz^*||^2 = \gamma^2||(BB^* + \gamma I)^{-1}y||^2 = r(\gamma)$ — монотонно возрастает по $\gamma \in (0,\infty)$, причем $\lim\limits_{\gamma\to+0} r(\gamma) = ||(I - BB^-)y||^2$, $\lim\limits_{\gamma\to\infty} r(\gamma) = ||y||^2$, а $||z^*||^2 = ||B^*(BB^* + \gamma I)^{-1}y||^2 = s(\gamma)$ — монотонно убывает по $\gamma \in (0,\infty)$, причем $\lim\limits_{\gamma\to+0} s(\gamma) = ||B^- y||^2$ и $\lim\limits_{\gamma\to\infty} s(\gamma) = 0$, то условие (19) выполняется для некоторого $\gamma \in (0,\infty)$, лишь если $||(I - BB^-)y|| < ||B^- y||$. В этом случае существует единственный корень $\gamma = \gamma(y) \in (0,\infty)$ уравнения (19) и

$$z^* = z(\gamma(y)) = (B^*B + \gamma(y)I)^{-1}B^*y \qquad (20)$$

определяет стационарную точку (15*). А так как $g(z) = \max(\vartheta(||y - Bz||^2), \vartheta(||z||^2))$ — выпуклая функция $z \in \mathcal{R}$, то z^* (19) — искомая точка минимума $g(\cdot)$.

Если $||(I - BB^-)y|| = ||B^- y||$, то $\gamma = \gamma(y) = 0$ $(\alpha = 1)$ и $z^* = B^- y = \lim\limits_{\gamma\to+0}(B^*B + \gamma I)^{-1}B^*y$.

Рассмотрим второй случай. Всякое решение z^* уравнения $\nabla\vartheta(||(y - Bz)||^2) = 0$ имеет вид [6]

$$z^* = B^- y + b,\ b \in \mathcal{N}(B). \qquad (21)$$

Так как $||(y - Bz)||^2 = ||(I - BB^-)y||^2$ и $||z^*||^2 = ||B^- y||^2 + ||b||^2$, то z^* (21) удовлетворяет условиям (17), если и только если

$$0 \leqslant ||b||^2 < ||(I - BB^-)y||^2 - ||B^- y||^2,\ b \in \mathcal{N}(B).$$

Третий случай, очевидно, невозможен.

Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть в схеме измерения* (1*) $A: \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ — *заданный линейный оператор,* $\varphi \in \mathcal{F}$ *и* $\nu \in \mathcal{R}$ — *независимые нечеткие элементы,* $\pi^{\varphi}(\cdot): \mathcal{F} \to [0,1]$ *и* $\pi^{\nu}(\cdot): \mathcal{R} \to [0,1]$ — *их распределения, т.е. пусть задана модель* $[A, \pi^{\varphi}(\cdot), \pi^{\nu}(\cdot)]$ *схемы измерения* (1*), *причем* $\neg\pi^{\varphi}(f) = \vartheta(\|F^{-1/2}(f - f_0)\|^2), f \in \mathcal{F}$,

$$\neg\pi^{\nu}(x - Af) = \vartheta(\|\Sigma^{-1/2}(x - Af)\|^2), \quad x \in \mathcal{R},$$

где $\vartheta(\cdot): [0, \infty) \to [0,1]$ — *строго монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая на* $[0, \infty)$ *функция,* $\vartheta(0) = 0$; $\Sigma: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *и* $F: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — *положительно определенные операторы. Обозначим* $\Delta(x) = \|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2 - \|(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2$, $x \in \mathcal{R}$, *тогда*

если при $\xi = x$ $\Delta(x) < 0$, *то* $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, *где* $\hat{\varphi} = f_0 + FA^*(AFA^* + \omega(x)\Sigma)^{-1}(x - Af_0)$, $\omega = \omega(x)$ — *корень уравнения*

$$\omega\|(BB^* + \omega I)^{-1}y\| = \|B^*(BB^* + \omega I)^{-1}y\|,$$

в котором $B = \Sigma^{-1/2}AF^{1/2}$, $y = \Sigma^{-1/2}(x - Af_0)$; *в этом случае*

$$M(d^*(x), x) = \vartheta(\|F^{-1/2}(A^*\Sigma^{-1}A + \omega(x)F^{-1})^{-1}A^*\Sigma^{-1}(x - Af_0)\|^2);$$

если при $\xi = x$ $\Delta(x) = 0$, *то* $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, *где* $\hat{\varphi} = f_0 + F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(\xi - Af_0)$; *в этом случае* $M(d^*(x), x) = \vartheta(\|(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(\xi - Af_0)\|^2)$;

если при $\xi = x$ $\Delta(x) > 0$, *то* $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, *где* $\hat{\varphi} = f_0 + F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x - Af_0) + a$, a — *любой элемент* $\mathcal{N}(A)$, *удовлетворяющий условию* $0 \leqslant \|F^{1/2}a\|^2 < \Delta(x)$; *в этом случае*

$$M(d^*(x), x) = \vartheta(\|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2).$$

Во всех случаях необходимость ошибки редукции $M(d^*(\cdot)) = \inf\limits_{x \in \mathcal{R}} M(d^*(x), x) = 0$.

На рисунке приведены результаты редукции измерения, полученные для описанной в теореме 2 теоретико-возможностной модели $[A, \pi^{\varphi}(\cdot), \pi^{\nu}(\cdot)]$ схемы (1*) и для теоретико-вероятностной модели $[A, F, f_0, \Sigma]$ схемы (1) [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. *Пытьев Ю.П.* // Матем. моделирование. 1991. **3**, № 10. С. 65.
3. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1992. **4**, № 2. С. 76.
4. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 3. P. 1).
5. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № . 6. С. 3 (Ibid. 1998. No. 6. P. 1).
6. *ПытьевЮ.П.* Математические методы интепретации эксперимента. М., 1989.
7. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М., 1972.

Поступила в редакцию
06.11.97

УДК 517.54: 532.525.2

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Иванов

(*кафедра математики*)

Рассмотрены три задачи плоского струйного течения идеальной несжимаемой жидкости: о симметричном обтекании уголка произвольного раствора струей конечной ширины (течение Рети) и бесконечным потоком (течение Бобылева) и задача Жуковского об истечении жидкости из несимметричной плоской воронки. Решения этих задач строятся методом конформного отображения области течения на сектор круга в плоскости годографа. Решения выражаются через неполную бета-функцию, а в конечном итоге — через гипергеометрическую функцию. Для рассмотренных течений построены сети линий тока и эквипотенциалей, а также изотахи и изоклины.

Введение

Задачи о плоских струйных течениях идеальной несжимаемой жидкости являются классическими задачами математической физики, история которых начинается с работ Г. Гельмгольца, Г. Кирхгофа и Н. Е. Жуковского [1–3]. Особенность задач о струйном течении состоит в том, что область течения априори неизвестна. Известна лишь часть границы тече-