

Третий случай, очевидно, невозможен.

Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а 2. Пусть в схеме измерения (1^*) $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ — заданный линейный оператор, $\varphi \in \mathcal{F}$ и $\nu \in \mathcal{R}$ — независимые нечеткие элементы, $\pi^\varphi(\cdot): \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ и $\pi^\nu(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ — их распределения, т.е. пусть задана модель $[A, \pi^\varphi(\cdot), \pi^\nu(\cdot)]$ схемы измерения (1^*) , причем $-\pi^\varphi(f) = \vartheta(\|F^{-1/2}(f - f_0)\|^2)$, $f \in \mathcal{F}$,

$-\pi^\nu(x - Af) = \vartheta(\|\Sigma^{-1/2}(x - Af)\|^2)$, $x \in \mathcal{R}$, где $\vartheta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ — строго монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, $\vartheta(0) = 0$; $\Sigma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ и $F: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ — положительно определенные операторы. Обозначим $\Delta(x) = \|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-1})\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2 - \|(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^{-1}\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2$, $x \in \mathcal{R}$, тогда если при $\xi = x$ $\Delta(x) < 0$, то $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, где $\hat{\varphi} = f_0 + FA^*(AF A^* + \omega(x)\Sigma)^{-1}(x - Af_0)$, $\omega = \omega(x)$ — корень уравнения

$$\omega\|(BB^* + \omega I)^{-1}y\| = \|B^*(BB^* + \omega I)^{-1}y\|,$$

в котором $B = \Sigma^{-1/2}AF^{1/2}$, $y = \Sigma^{-1/2}(x - Af_0)$; в этом случае

$$M(d^*(x), x) = \vartheta(\|F^{-1/2}(A^*\Sigma^{-1}A + \omega(x)F^{-1})^{-1}A^*\Sigma^{-1}(x - Af_0)\|^2);$$

если при $\xi = x$ $\Delta(x) = 0$, то $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, где $\hat{\varphi} = f_0 + F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^{-1}\Sigma^{-1/2}(\xi - Af_0)$; в этом случае $M(d^*(x), x) = \vartheta(\|(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^{-1}\Sigma^{-1/2}(\xi - Af_0)\|^2)$;

если при $\xi = x$ $\Delta(x) > 0$, то $d^*(x) = U\hat{\varphi}$, где $\hat{\varphi} = f_0 + F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^{-1}\Sigma^{-1/2}(x - Af_0) + a$,

a — любой элемент $\mathcal{N}(A)$, удовлетворяющий условию $0 \leq \|F^{1/2}a\|^2 < \Delta(x)$; в этом случае

$$M(d^*(x), x) = \vartheta(\|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^{-1})\Sigma^{-1/2}(x - Af_0)\|^2).$$

Во всех случаях необходимость ошибки редукции $M(d^*(\cdot)) = \inf_{x \in \mathcal{R}} M(d^*(x), x) = 0$.

На рисунке приведены результаты редукции измерения, полученные для описанной в теореме 2 теоретико-возможностной модели $[A, \pi^\varphi(\cdot), \pi^\nu(\cdot)]$ схемы (1^*) и для теоретико-вероятностной модели $[A, F, f_0, \Sigma]$ схемы (1) [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. Пытьев Ю.П. // Матем. моделирование. 1991. 3, № 10. С. 65.
3. Пытьев Ю.П. // Там же. 1992. 4, № 2. С. 76.
4. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 3. P. 1).
5. Пытьев Ю.П. // Там же. 1998. № 6. С. 3 (Ibid. 1998. No. 6. P. 1).
6. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
7. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., 1972.

Поступила в редакцию 06.11.97

УДК 517.54: 532.525.2

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Иванов

(кафедра математики)

Рассмотрены три задачи плоского струйного течения идеальной несжимаемой жидкости: о симметричном обтекании уголка произвольного раствора струей конечной ширины (течение Рети) и бесконечным потоком (течение Бобылева) и задача Жуковского об истечении жидкости из несимметричной плоской воронки. Решения этих задач строятся методом конформного отображения области течения на сектор круга в плоскости годографа. Решения выражаются через неполную бета-функцию, а в конечном итоге — через гипергеометрическую функцию. Для рассмотренных течений построены сети линий тока и эквипотенциалей, а также изотакхи и изоклины.

Введение

Задачи о плоских струйных течениях идеальной несжимаемой жидкости являются классическими задачами математической физики, история которых

начинается с работ Г.Гельмгольца, Г.Кирхгофа и Н.Е.Жуковского [1–3]. Особенность задач о струйном течении состоит в том, что область течения априори неизвестна. Известна лишь часть границы тече-

ния (обтекаемое препятствие), а относительно свободной поверхности струи известно только, что она является линией тока и на ней абсолютная величина скорости постоянна (это следует из интеграла Бернулли).

Метод решения задач о струйных течениях с помощью конформного отображения был предложен Кирхгофом [2]. Он заключается в построении отображения области течения на область изменения комплексной скорости (годограф скорости). Если известна функция, отображающая годограф на область изменения комплексного потенциала, то нахождение области течения сводится к вычислению квадратуры.

В монографии [4] рассмотрено множество задач, для которых указанные квадратуры выражаются в элементарных функциях. Для некоторых задач решение доведено до визуализации течений, т.е. до построения картин линий тока, изотак, изобар и т.п. В монографии [5] вычислены профили некоторых струйных течений с помощью численного интегрирования, однако полных картин течений в этой книге нет. Автору неизвестны какие-либо другие примеры построения картин струйных течений.

В настоящей работе рассмотрены три струйных течения, для которых годограф скорости представляет сектор круга: задачи о симметричном обтекании уголка струей конечной ширины (течение Рети) и бесконечным потоком (течение Бобылева) и задача об истечении жидкости из несимметричной воронки (задача Жуковского). Решения этих задач выражаются через специальные функции — так называемые неполные бета-функции. Предложен алгоритм вычисления неполных бета-функций, позволяющий довести решение рассматриваемых задач до конца, т.е. до визуализации течений на дисплее ПК.

1. Течения Рети

Собственно течением Рети называется [4] симметричное обтекание уголка струей, вытекающей из прямого сопла (рис. 1, а). К классу течений Рети относятся различные предельные случаи указанного течения, когда либо уголок имеет бесконечные размеры, либо (при конечных размерах уголка) стенки сопла продолжают в бесконечность, либо само сопло удаляется в бесконечность (обтекание уголка свободной струей конечной ширины).

Рассмотрим общую задачу Рети об обтекании уголка с углом раствора $2\pi\alpha$ (рис. 1, а). Рассматриваем область течения как область на комплексной плоскости $z = x + iy$. Течение несжимаемой жидкости предполагаем потенциальным с комплексным потенциалом $\Phi = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока. Комплексная скорость выражается формулой

$$\bar{v} = v_x - iv_y = d\Phi/dz.$$

Скорость на свободной поверхности струи полагаем равной единице, асимптотическую скорость в сопле равной k ($k < 1$), асимптотическую скорость струи $e^{-i\gamma}$ (γ — угол наклона струи, $0 \leq \gamma \leq \pi\alpha$).

Годограф скорости рассматриваемого течения $\zeta = d\Phi/dz$ представлен на рис. 1, б. Он представляет собой сектор круга раствором $2\pi\alpha$ с разрезом вдоль отрезка $(k, 1)$, причем верхней половине области течения соответствует нижняя половина сектора. В качестве области изменения комплексного потенциала для верхней половины течения возьмем бесконечную полосу $0 < \text{Im } \Phi < \pi$.

Конформное отображение нижней половины сектора годографа на указанную полосу, при котором точки A, B, D отображаются соответственно в точки $\Phi_1 = -\infty$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = +\infty$, осуществляется с помощью последовательности преобразований:

$$t = \zeta^{1/\alpha}, \quad u = 1/2(t + t^{-1}), \quad v = (u - h)/(u - d),$$

$$\Phi = \ln v = \ln(u - h) - \ln(u - d).$$

Здесь введены обозначения $h = (a + a^{-1})/2$, $d = \cos \beta$, где $a = k^{1/\alpha}$, $\beta = \gamma/\alpha$.

Координаты точек области течения выражаются квадратурой

$$z = \int \frac{d\Phi}{\zeta} = \int \left(\frac{1}{u - h} - \frac{1}{u - d} \right) \frac{du}{\zeta} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2 - 2th + 1} - \frac{1}{t^2 - 2td + 1} \right) \frac{t^2 - 1}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (1)$$

Учитывая разложение

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2th + 1} = \frac{t}{t - a} + \frac{t}{t - a^{-1}} - 1,$$

представим (1) в виде

$$z = - \int_0^t \left(\frac{a}{1 - at} + \frac{a^{-1}}{1 - a^{-1}t} - \frac{c}{1 - ct} - \frac{\bar{c}}{1 - \bar{c}t} \right) \frac{dt}{t^\alpha}, \quad (2)$$

где $c = e^{i\beta}$, $\bar{c} = e^{-i\beta}$.

Квадратура (2) выражается через специальную функцию, называемую неполной бета-функцией [6]:

$$B_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1} (1 - t)^{q-1} dt, \quad (3)$$

где p и q — вещественные параметры, $p > 0$.

Окончательно решение задачи Рети представляется в виде

$$z = -a^\alpha B_{at}(1 - \alpha, 0) - a^{-\alpha} B_{t/a}(1 - \alpha, 0) +$$

$$+ c^\alpha B_{ct}(1 - \alpha, 0) + \bar{c}^\alpha B_{\bar{c}t}(1 - \alpha, 0), \quad (4)$$

где

$$t = u - \sqrt{u^2 - 1}, \quad u = (vd - h)/(v - 1), \quad v = e^\Phi. \quad (5)$$

Функция $z(\Phi)$, определяемая последовательностью преобразований (4)–(5), конформно отображает полосу $0 < \text{Im } \Phi < \pi$ на верхнюю половину области течения (рис. 1, а). При этом декартова сеть линий

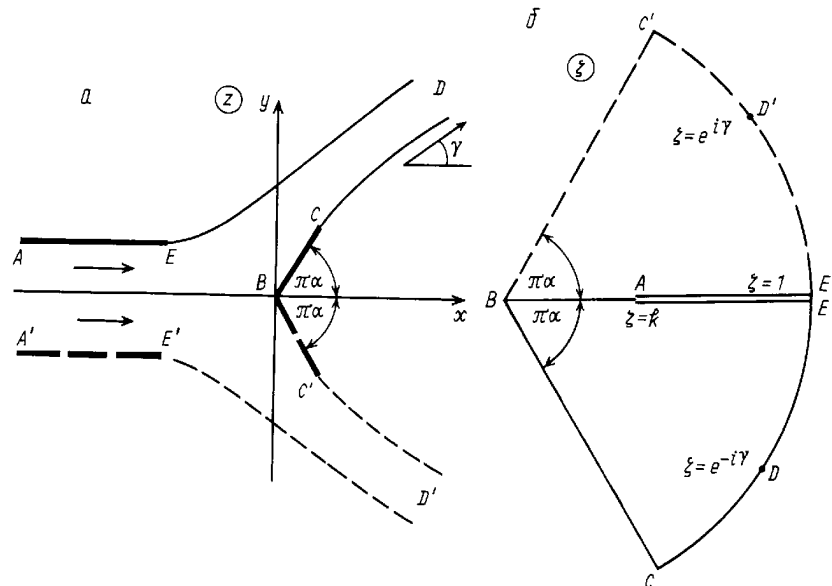


Рис. 1. Течение Рети (а) и годограф его скорости (б)

в полосе отображается в сеть линий тока и эквипотенциалей течения Рети. По принципу симметрии полоса $-\pi < \text{Im } \Phi < 0$ отображается этой функцией на нижнюю половину области течения.

2. Вычисление неполной бета-функции комплексного аргумента

Неполная бета-функция (3) выражается через гипергеометрическую функцию [6]:

$$B_z(p, q) = \frac{z^p}{p} F(p, 1 - q, p + 1, z). \quad (6)$$

В настоящей работе рассматриваются задачи, в которых требуется вычислить функцию $B_z(p, q)$ при $|z| \leq 1, p > 0, q = 0$ или $q = -2$.

Внутри круга $|z| < 1$ функция (6) представляется абсолютно сходящимся рядом Гаусса:

$$B_z(p, q) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q)_n}{(p + n)n!} z^n, \quad (7)$$

где $(a)_0 = 1, (a)_n = a(a + 1) \dots (a + n - 1)$ — символ Похгаммера; $|\arg z| < \pi$. На окружности $|z| = 1$ ряд (7) сходится абсолютно при $q > 0$, сходится условно при $-1 < q \leq 0$ (кроме точки $z = 1$) и расходится при $q \leq -1$.

а) Случай $q = 0$.

Функцию $B_z(p, 0)$ можно вычислять при $|z| \leq 1, z \neq 1$ как сумму сходящегося ряда

$$B_z(p, 0) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} z^n / (p + n). \quad (8)$$

В окрестности точки $z = 1$, в которой функция $B_z(p, 0)$ имеет логарифмическую особенность, вычисление функции по формуле (8) дает большую погрешность. Разложение этой функции в окрестности

точки $z = 1$ получается из соответствующего разложения гипергеометрической функции [6]:

$$B_z(p, 0) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} \times [\psi(n + 1) - \psi(n + p) - \ln(1 - z)] (1 - z)^n, \quad (9)$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная Γ -функции; $|\arg(1 - z)| < \pi$. Ряд (9) сходится при $0 < |z - 1| < 1$ абсолютно.

б) Случай $q = -2$.

Для функции $B_z(p, -2)$ ряд (7) на окружности $|z| = 1$ расходится. Для получения ряда, сходящегося на окружности $|z| = 1$, следует дважды проинтегрировать (3) по частям:

$$B_z(p, -2) = \frac{pz - p + 1}{2(1 - z)^2} z^{p-2} + \frac{(p - 1)(p - 2)}{2} \int_0^z \frac{t^{p-3}}{1 - t} dt. \quad (10)$$

Здесь интеграл в правой части сходится только при $p > 2$, но если представить (10) в виде

$$B_z(p, -2) = \frac{z^{p-2}}{2} \times \left[\frac{pz - p + 1}{(1 - z)^2} + (p - 1)F(p - 2, 1, p - 1, z) \right] \quad (11)$$

и учесть аналитическую зависимость гипергеометрической функции от параметров, то получится выражение, справедливое при любых $p > 0, p \neq 1$. Гипергеометрический ряд в правой части формулы (11) сходится условно на окружности $|z| = 1$ (при $z \neq 1$). В точке $z = 0$ выражение (11) имеет устранимую особенность.

Результаты расчета сети линий тока и эквипотенциалей течения Рети по формулам (4)–(5),

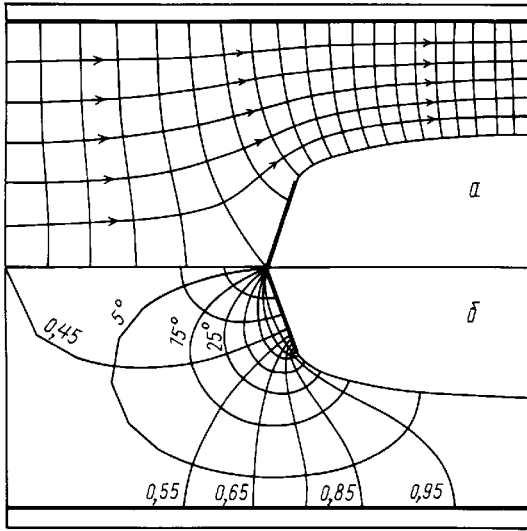


Рис. 2. Картина струйного обтекания решетки уголков раствором 144° при $k = 0,459$: a — линии тока и эквипотенциали; b — изотахи и изоклины

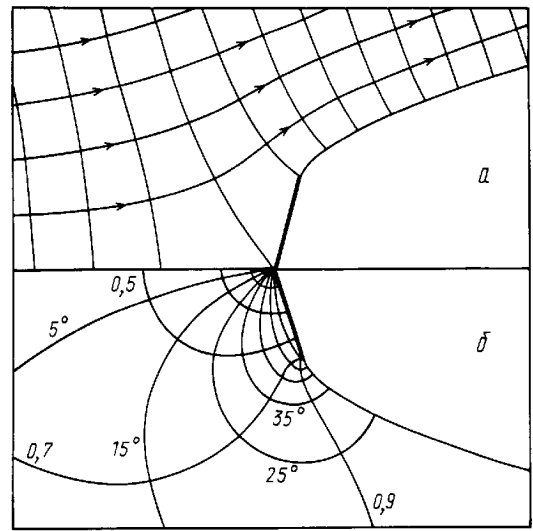


Рис. 3. Картины струйного обтекания угла раствором 144° бесконечным потоком (течение Бобылева): a — линии тока и эквипотенциали; b — изотахи и изоклины

(8)–(9) представлены на рис. 2, a . Здесь рассмотрен предельный случай течения Рети, для которого $\gamma = 0$, $c = \bar{c} = 1$, соответствующий обтеканию угла, помещенного в бесконечном канале. Иначе эту картину можно рассматривать как один период течения при нормальном обтекании решетки уголков бесконечным потоком жидкости. На рис. 2, b изображены изотахи и изоклины этого течения, построенные как линии уровня функций $v = |\zeta|$, $\theta = \arg \zeta$. Изотахи построены для значений скорости $v = 0,25; 0,35; \dots; 0,95$, а изоклины — для значений $\theta = 5^\circ, 15^\circ, 25^\circ, \dots, 65^\circ$.

3. Течение Бобылева

Течением Бобылева называется [4] симметричное струйное обтекание угла неограниченным потоком. Годограф скорости $\zeta = \bar{v} = d\Phi/dz$ для течения Бобылева представляет такой же сектор круга, как на рис. 1, a , только источником движения для течения Бобылева является диполь, помещенный в точке $\zeta = 1$. Областью изменения комплексного потенциала Φ является плоскость с разрезом вдоль луча вещественной оси $(0, \infty)$. Верхней полуплоскости $\text{Im } \Phi > 0$ соответствует нижняя половина сектора: $|\zeta| < 1$, $-\pi\alpha < \arg \zeta < 0$.

Отображение нижней половины сектора годографа на полуплоскость $\text{Im } \Phi > 0$, при котором точка $\zeta = 1$ отображается в бесконечно удаленную точку плоскости Φ , осуществляется последовательностью преобразований

$$t = \zeta^{1/\alpha}, \quad u = 1/2(t + t^{-1}), \quad \Phi = \frac{1}{1-u}.$$

Координаты точек области течения выражаются квадратурой

$$z = \int \frac{d\Phi}{\zeta} = -2 \int \frac{1+t}{(1-t)^3 t^\alpha} dt = -2B_t(1-\alpha, -2) - 2B_t(2-\alpha, -2), \quad (12)$$

где параметр t выражается через комплексный потенциал Φ :

$$t = u - \sqrt{u^2 - 1}, \quad u = 1 - 1/\Phi. \quad (13)$$

Метод вычисления функции $B_t(p, -2)$ изложен выше в п. 2.

Пример расчета и визуализации струйного обтекания угла раствором 144° по формулам (12)–(13) приведен на рис. 3, a (линии тока и эквипотенциали) и рис. 3, b (изотахи и изоклины). Изотахи построены для значений скорости $v = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ и $0,9$, а изоклины — для значений $\theta = 5^\circ, 15^\circ, \dots, 65^\circ$.

4. Задача Н. Е. Жуковского об истечении струи из щели между двумя полуплоскостями

Задача о струе, вытекающей из несимметричной плоской воронки, впервые сформулирована в работе [3].

Рассмотрим две полуплоскости, перпендикулярные плоскости (x, y) и составляющие с плоскостью $y = 0$ углы $\pi\alpha$ и $-\pi\alpha$. Пусть угол, составляемый асимптотической скоростью струи с осью x , равен γ . Годограф скорости плоского течения жидкости, вытекающей из такой воронки, представлен на рис. 4.

Конформное отображение годографа скорости на область изменения комплексного потенциала (полосу $0 < \text{Im } \Phi < \pi$) осуществляется последовательностью преобразований

$$t = -i\zeta^{1/2\alpha}, \quad u = (t + t^{-1})/2, \quad \Phi = -\ln(d - u),$$

где $d = \cos \beta$, $\beta = -\gamma/2\alpha - \pi/2$. Координаты точек области течения выражаются квадратурой

$$z = \int \frac{d\Phi}{\zeta} = -e^{-i\pi\alpha} \int \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2dt + 1} \frac{dt}{t^{2\alpha+1}}. \quad (14)$$

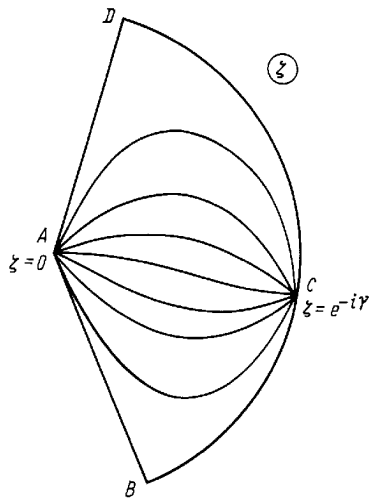


Рис. 4. Голограф скорости струи жидкости, вытекающей из несимметричной воронки

Для сведения интеграла (14) к неполной бета-функции используем разложение

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2dt + 1} = -1 + \frac{t}{t - c} + \frac{t}{t - \bar{c}}, \quad (c = e^{i\beta}, \bar{c} = e^{-i\beta}),$$

с помощью которого (14) представляется в виде

$$z = -e^{-i\pi\alpha} \left[\frac{t^{-2\alpha}}{2\alpha} - \bar{c} \int_0^t \frac{t^{-2\alpha} dt}{1 - t\bar{c}} - c \int_0^t \frac{t^{-2\alpha} dt}{1 - tc} \right].$$

Окончательно отображение полосы $0 < \text{Im } \Phi < \pi$ на область течения осуществляется последовательностью преобразований

$$u = d - e^{-\Phi}, \quad t = u - \sqrt{u^2 - 1},$$

$$z = -e^{-i\pi\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{t^{-2\alpha}}{2\alpha} - \bar{c}^{2\alpha} B_{t\bar{c}}(1 - 2\alpha, 0) - c^{2\alpha} B_{tc}(1 - 2\alpha, 0) \right]. \quad (15)$$

При отображении посредством функции (15) декартова сеть в полосе отображается в сеть линий тока и эквипотенциалей для струйного истечения жидкости из плоской воронки. Пример картины такого течения из воронки раствором 144° при угле отклонения струи $\gamma = 10^\circ$ представлен на рис. 5.

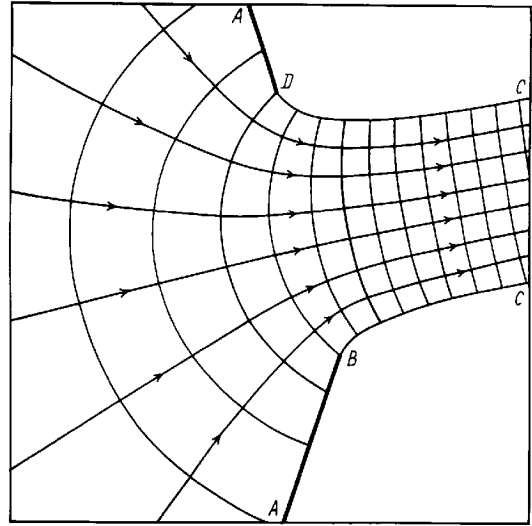


Рис. 5. Линии тока и эквипотенциали для струи, вытекающей из несимметричной воронки раствором 144° при $\gamma = 10^\circ$

Рисунки 2, 3 и 5 построены с помощью модифицированной программы CONFORM, прилагаемой к книге [7].

Автор благодарен Г. Ю. Степанову и Ф. В. Шугаеву за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Литература

1. Helmholtz H. Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig, 1882. Bd. 1. S. 146.
2. Kirchhoff G.R. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1882. S. 416.
3. Жуковский Н.Е. Собр. соч. М., 1949. Т. 2. С. 489.
4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., 1964.
5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1979.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.
7. Ivanov V.I., Trubetskov M.K. Handbook of Conformal Mapping with Computer-Aided Visualization. Boca Raton: CRC Press, 1994.

Поступила в редакцию
28.11.97