

УДК 537.874

АНАЛИЗ РАССЕЯНИЯ СВЕТА ЧАСТИЦЕЙ ВНУТРИ СЛОЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Е. Ю. Еремина, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Математическая модель задачи рассеяния света частицей, расположенной внутри слоя на поверхности подложки, анализируется на основе метода дискретных источников. Построен вычислительный алгоритм. Приведены результаты расчетов рассеяния света частицами различных материалов.

Введение

Совершенствование элементной базы персональных компьютеров становится все более динамичным. Дальнейшая миниатюризация схем микропроцессоров, элементов памяти и дисков накопителей требуют более жестких стандартов отклонения их конфигураций от заданной структуры. Одной из важнейших является проблема обнаружения загрязняющих частиц, попадающих на поверхность силиконового вейфера на различных стадиях технологического процесса. К наиболее сложным и трудно поддающимся разрешению проблемам относится обнаружение частиц, скрытых под пленкой, которая используется в процессе литографии силиконовых вейферов. Проведение экспериментальных исследований осложняется из-за отсутствия технологии калибровки частиц, за исключением полистироловых, и требует больших денежных затрат. В работе [1] на основе метода дискретных источников (МДИ) проведен анализ рассеяния P - и S -поляризованного света частицами на силиконовой подложке. В настоящей работе методика [1] обобщается на исследования рассеяния света частицами, располагающимися внутри произвольно диэлектрического слоя на подложке.

1. Математическая модель проницаемой частицы в слое

Начнем с математической постановки рассматриваемой задачи. Пусть $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ — поле плоской электромагнитной волны линейной поляризации, падающей под углом γ относительно нормали на плоскую границу Ξ_f раздела воздух–слой D_0, D_f (рис. 1), а частица D_i с гладкой границей ∂D расположена целиком внутри слоя, ограниченного плоскостями Ξ_f

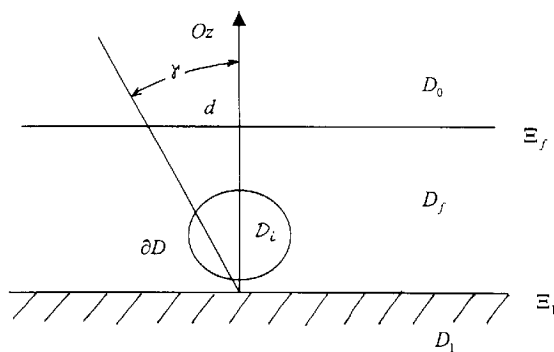


Рис. 1. Геометрия задачи

и Ξ_1 толщины d . Плоскость Ξ_1 разделяет слой и подложку D_1 . Пусть частица — осесимметричная и ось симметрии совпадает с направлением внешней нормали к Ξ_1 . Введем прямоугольную систему координат, выбрав ее начало на плоскости Ξ_1 , а ось Oz направим вдоль оси симметрии рассеивателя. Тогда математическая постановка задачи имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{H}_t = ik\epsilon_t \mathbf{E}_t; \quad \nabla \times \mathbf{E}_t = -ik\mu_t \mathbf{H}_t \quad \text{в } D_t, \quad (1)$$

$$t = 0, f, 1, i,$$

$$\mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_f(p)) = 0, \quad p \in \partial D, \quad (2)$$

$$\mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_f(p)) = 0,$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(p) - \mathbf{E}_f(p)) = 0, \quad p \in \Xi_f, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{H}_f(p)) = 0,$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_f(p) - \mathbf{E}_1(p)) = 0, \quad p \in \Xi_1; \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_f(p) - \mathbf{H}_1(p)) = 0,$$

сюда надо добавить условия излучения (затухания) для рассеянных полей на бесконечности ($z \neq 0, d$).

Здесь \mathbf{n}_p — нормаль к поверхности ∂D , а $(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$ — полное поле в соответствующей области, в частности поле $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ представляет собой сумму падающего поля $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$, поля, отраженного от поверхности Ξ_f , и рассеянного поля в D_0 . Полагаем поверхность частицы гладкой: $\partial D \in C^{(1,\alpha)}$, а параметры сред удовлетворяющими условиям $\text{Im} \epsilon_t, \mu_t \leq 0$ (временная зависимость $\exp\{i\omega t\}$). Тогда граничная задача (1)–(4) имеет единственное решение.

Прежде чем строить приближенное решение для рассеянных полей, решим задачу дифракции поля плоской волны $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ на слоистой структуре воздух–слой–подложка.

Как известно [2], это решение может быть записано в явном виде. Будем обозначать полученное поле $(\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0)$, $t = 0, f, 1$. Приближенное решение граничной задачи (1)–(4) будем строить на основе МДИ [3], суть которого состоит в представлении рассеянного поля в виде конечной линейной комбинации полей мультиполей, удовлетворяющей системе уравнений

Максвелла в областях $D_{0,f,1,i}$, условиям на бесконечности для рассеянного поля в $D_{0,f,1}$, а также условиям сопряжения для тангенциальных компонент полей на $\Xi_{f,1}$. В этом случае решение граничной задачи рассеяния (1)–(4) сводится к задаче аппроксимации поля внешнего возбуждения в слое на поверхности частицы полями мультиполей. Таким образом, определение неизвестных амплитуд дискретных источников производится из условий сопряжения только на поверхности частицы ∂D . Отличительной чертой подобного подхода является возможность проведения апостериорной оценки погрешности полученного решения путем вычисления невязки граничных значений на ∂D .

В основу представления для внешнего поля положим мультипольные источники, удовлетворяющие условиям сопряжения на плоскостях $\Xi_{f,1}$. В этом случае структура полей будет определяться тензором Грина слоистой среды вида

$$\mathbf{G}(Q, P) = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ \partial f / \partial x_Q & \partial f / \partial y_Q & \sigma \end{bmatrix}.$$

Поля мультипольных источников электрического (e) и магнитного (h) типа строятся на основе векторных потенциалов, имеющих следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mx}^{e,h} &= \mathbf{e}_x g_m^{e,h} - \mathbf{e}_z f_{m+1} \cos \phi, \\ \mathbf{A}_{my}^{e,h} &= \mathbf{e}_y g_m^{e,h} - \mathbf{e}_z f_{m+1} \sin \phi, \end{aligned}$$

где соответствующие азимутальные гармоники компонент тензора Грина имеют вид

$$g_m^{e,h}(q, w_n) = \int_0^\infty J_m(\lambda \rho) \nu_{11}^{e,h}(z, w_n, \lambda) \lambda^{m+1} d\lambda, \quad (5)$$

$$f_m(q, w_n) = \int_0^\infty J_m(\lambda \rho) \nu_{31}^{e,h}(z, w_n, \lambda) \lambda^{m+1} d\lambda. \quad (6)$$

Здесь J_m — цилиндрическая функция Бесселя, точка $q = (\rho, z)$ располагается в полуплоскости $\phi = \text{const}$, а мультиполи распределены вдоль оси симметрии $w_n \in Oz$ внутри D_i . В данном случае для спектральных функций $\nu_{11}^{e,h}(\lambda, z)$, $\nu_{31}^{e,h}(\lambda, z)$ справедливы следующие представления:

$$\nu_{11}^{e,h} = \begin{cases} A_{11}^{e,h}(\lambda, w_n, d) \exp\{-\eta_0(z-d)\}, & z > d, \\ \frac{\exp\{-\eta_f|z-z_0|\}}{\eta_f} + B_{11}^{e,h} \exp\{-\eta_f(d-z)\} + \\ + C_{11}^{e,h} \exp\{-\eta_f z\}, & d > z > 0, \\ D_{11}^{e,h} \exp\{\eta_1 z\}, & z < 0, \end{cases}$$

$$\nu_{31}^{e,h} = \begin{cases} A_{11}^{e,h}(\lambda, w_n, d) \exp\{-\eta_0(z-d)\}, & z > d, \\ B_{31}^{e,h} \exp\{-\eta_f(d-z)\} + C_{31}^{e,h} \exp\{-\eta_f z\}, & d > z > 0, \\ D_{31}^{e,h} \exp\{\eta_f z\}, & z < 0. \end{cases}$$

Кроме того, спектральные функции удовлетворяют условиям сопряжения на границах $z = 0, d$ [4]:

$$\begin{aligned} [\nu_{11}^e] &= \left[\frac{d\nu_{11}^e/dz}{\mu} \right] = 0, & [\nu_{11}^h] &= \left[\frac{d\nu_{11}^h/dz}{\varepsilon} \right] = 0, \\ \left[\frac{\nu_{33}^e}{\mu} \right] &= \left[\frac{d\nu_{33}^e/dz}{\varepsilon\mu} \right] = 0, \\ \left[\frac{\nu_{33}^h}{\varepsilon} \right] &= \left[\frac{d\nu_{33}^h/dz}{\varepsilon\mu} \right] = 0, \\ \left[\frac{d\nu_{31}^e/dz}{\varepsilon\mu} \right] &= - \left[\frac{1}{\varepsilon\mu} \right] \nu_{11}^e, & \left[\frac{\nu_{31}^h}{\varepsilon\mu} \right] &= - \left[\frac{1}{\varepsilon\mu} \right] \nu_{11}^h, \\ \left[\frac{d\nu_{31}^e/dz}{\mu} \right] &= 0, & \left[\frac{\nu_{31}^h}{\varepsilon} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\eta_t^2 = \lambda^2 - k_t^2$, $k_t^2 = k^2 \varepsilon_t \mu_t$, $t = 0, 1, f$.

При построении приближенного решения будем следовать схеме МДИ, изложенной в работе [1]. В основу представления для полного поля внутри частицы положим регулярные функции, особенности которых расположены на бесконечности [3]:

$$\mathbf{A}_{mx}^i = g_m^i(q, w_n) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{A}_{my}^i = g_m^i(q, w_n) \mathbf{e}_y, \quad (7)$$

$$g_m^i(q, w) = j_m(k_i R_{qw}) \left(\frac{k_i \rho}{R_{qw}} \right)^m, \quad (8)$$

где j_m — сферическая функция Бесселя, а $w_n \in Oz$.

Легко видеть, что $\rho/R_{qw} = \sin \theta_{qw}$, где θ_{qw} — угол сферической системы координат с центром в точке w . В силу этого функции g_m^i можно переписать в виде

$$g_m^i(q, w) = j_m(k_i R_{qw}) P_m^m(\cos \theta_{qw}) \frac{k_i^m}{(2m-1)!!}.$$

Здесь P_m^m — присоединенные полиномы Лежандра. Теперь нетрудно заметить, что функции

$$G_m^i(q, w) = g_m^i(q, w) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix}$$

удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца $\Delta G_m^i + k_i^2 G_m^i = 0$ всюду в конечной области R^3 и, следовательно, являются регулярными функциями.

Можно теперь формально ограничиться построением представления для электромагнитных полей лишь в слое вне и внутри частицы. Мы будем также строить приближенное решение, которое учитывает не только осевую симметрию рассеивателя, но и одновременно поляризацию внешнего возбуждения [5].

Будем рассматривать P -поляризованную плоскую волну (вектор \mathbf{E}^0 которой лежит в плоскости падения), распространяющуюся под углом θ_0 к оси Oz .

Решив задачу дифракции плоской волны на заданной слоистой структуре в отсутствие частицы, мы получим поле внешнего возбуждения внутри слоя. Оно представляется в виде набора двух плоских волн, распространяющихся под некоторыми углами в противоположных направлениях.

Основываясь на идеологии МДИ [5], чтобы учесть поляризацию внешнего поля, введем следующие комбинации потенциалов:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\nu f}^e := \mathbf{A}_{mx}^e \cos m\phi - \mathbf{A}_{my}^e \sin m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu f}^h := \mathbf{A}_{mx}^h \sin m\phi + \mathbf{A}_{my}^h \cos m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu i}^e := \mathbf{A}_{mx}^i \cos m\phi - \mathbf{A}_{my}^i \sin m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu i}^h := \mathbf{A}_{mx}^i \sin m\phi + \mathbf{A}_{my}^i \cos m\phi, \end{cases} \quad (9)$$

$\nu = \{m, n\}$ — мультииндекс с диапазоном изменения $0 \leq m \leq M$, $1 \leq n \leq N$, где M — максимальное число гармоник Фурье, а N — число мультиполей, одно и то же для всех значений m . Обозначим через ν_0, Y ($Y = \{M, N\}$) нижнее и верхнее значения мультииндекса. Кроме того, введем векторные потенциалы для вертикальных диполей. В тензоре Грина за вертикальные диполи отвечает σ и тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n0}^e &= \sigma^e(q, w_n) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A}_{ni}^e = g_0^i(q, w_n) \mathbf{e}_z, \\ \sigma^e &= g_0^h(q, w_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Для удобства изложения введем сокращенные обозначения для полей, которые будут использоваться для построения приближенного решения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\nu t}^e \\ \mathbf{H}_{\nu t}^e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{i}{k\varepsilon_t \mu_t} \nabla \times \nabla \times \\ -\frac{1}{\mu_t} \nabla \times \end{pmatrix} \mathbf{A}_{\nu t}^e, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\nu t}^h \\ \mathbf{H}_{\nu t}^h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{k\varepsilon_t} \nabla \times \\ \frac{i}{k\varepsilon_t \mu_t} \nabla \times \nabla \times \end{pmatrix} \mathbf{A}_{\nu t}^h. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) будем строить представление для приближенного решения граничной задачи (1)–(4) в случае P -поляризованного поля в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t^Y \\ \mathbf{H}_t^Y \end{pmatrix} &= \sum_{\nu=\nu_0}^Y \left\{ p_\nu^t \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\nu t}^e \\ \mathbf{H}_{\nu t}^e \end{pmatrix} + q_\nu^t \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\nu t}^h \\ \mathbf{H}_{\nu t}^h \end{pmatrix} \right\} + \\ &+ \sum_{n=1}^N r_n^t \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{nt}^e \\ \mathbf{H}_{nt}^e \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

где последнее слагаемое соответствует вертикальным дипольным источникам.

Как отмечалось выше, представление (12) удовлетворяет всем условиям граничной задачи (1)–(4), кроме условий сопряжения на поверхности частицы.

В случае S -поляризации падающей волны, когда вектор перпендикулярен плоскости падения, аналогично схеме [5], приближенное решение задачи (1)–(4)

будет иметь вид (12), где вместо потенциалов (9) используются следующие комбинации:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\nu f}^e := \mathbf{A}_{mx}^e \sin m\phi + \mathbf{A}_{my}^e \cos m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu f}^h := \mathbf{A}_{mx}^h \cos m\phi - \mathbf{A}_{my}^h \sin m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu i}^e := \mathbf{A}_{mx}^i \sin m\phi + \mathbf{A}_{my}^i \cos m\phi, \\ \mathbf{A}_{\nu i}^h := \mathbf{A}_{mx}^i \cos m\phi - \mathbf{A}_{my}^i \sin m\phi. \end{cases} \quad (13)$$

Кроме того, слагаемое, соответствующее вертикальным дипольным источникам в правой части (12), содержит вместо поля вертикальных электрических диполей $(\mathbf{E}_{nt}^e, \mathbf{H}_{nt}^e)$ поле вертикальных магнитных диполей $(\mathbf{E}_{nt}^h, \mathbf{H}_{nt}^h)$, векторные потенциалы которых имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n0}^h &= \sigma^h(q, w_n) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A}_{ni}^h = g_0^i(q, w_n) \mathbf{e}_z, \\ \sigma^h &= g_0^e(q, w_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Это вызвано тем, что при S -поляризации вектор \mathbf{H}^0 лежит в плоскости падения.

Итак, приближенное решение граничной задачи (1)–(4) для рассеянного поля $(\mathbf{E}_t^S, \mathbf{H}_t^S)$ в D_t , $t = 0, f, 1$ и полного поля в D_i , учитывающего поляризацию возбуждающей плоской волны, имеет следующие свойства:

- 1) удовлетворяет системе уравнений Максвелла в областях D_α , $\alpha = 0, f, 1, i$;
- 2) автоматически удовлетворяет условиям сопряжения для тангенциальных компонент полей на границах раздела воздух–слой и слой–подложка $\Xi_{f,1}$;
- 3) удовлетворяет условиям на бесконечности.

В силу полноты системы мультиполей [3] и ортогональности систем мультиполей (9)–(10) и (13)–(14) для обоих типов поляризации справедлива следующая

Т е о р е м а. Пусть $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ есть поле P - или S -поляризации, тогда для любого $\delta > 0$ существует $Y(\delta)$ и такие коэффициенты $\{p_\nu, q_\nu\}_{\nu=\nu_0}^Y$, что

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{n}, \mathbf{E}_i^Y - \mathbf{E}_f^Y - \mathbf{E}_f^0 \\ \mathbf{n}, \mathbf{H}_i^Y - \mathbf{H}_f^Y - \mathbf{H}_f^0 \end{bmatrix} \right\|_{L_2(\partial D)} < \delta,$$

где $(\mathbf{E}^Y, \mathbf{H}^Y)$ задается представлением (12), а векторные потенциалы имеют вид (9)–(10) или (13)–(14).

2. Вычислительный алгоритм

При рассмотрении вычислительного алгоритма будем следовать схеме [1], подчеркивая лишь основные отличительные особенности. Как уже отмечалось, приближенное решение (12) удовлетворяет всем условиям граничной задачи (1)–(4), кроме условий сопряжения на поверхности частицы. Следовательно, определение неизвестных амплитуд дискретных источников проводится именно из условий на поверхности ∂D .

Алгоритм определения амплитуд удобно разбить на несколько этапов. Поскольку источники локализованы на оси симметрии или в соответствующей части комплексной плоскости [5], приближенное решение (12) задачи (1)–(4) представляет собой конечную линейную комбинацию гармоник Фурье по азимутальной переменной ϕ . Поэтому на первом этапе мы разлагаем касательные компоненты электрического и магнитного полей возбуждающих плоских волн в ряд Фурье по ϕ , используя представление для плоской волны следующего вида:

$$\exp\{\pm i\tilde{\omega} \cos \phi\} = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (\pm i)^m J_m(\tilde{\omega}) \cos m\phi,$$

где $\tilde{\omega} = k_f \rho \sin \theta_0$. Так как представление для полей $(\mathbf{E}_t^Y, \mathbf{H}_t^Y)$ (12) имеет вид конечной линейной комбинации гармоник Фурье, то определение амплитуд дискретных источников сводится к определению вектора амплитуд по гармоникам (т.е. при фиксированном значении номера азимутальной гармоники m). В результате этого поверхностная аппроксимация сводится к аппроксимации полей на образующей \mathfrak{J} тела D_i .

Для решения последней задачи используем метод коллокаций, сшивая азимутальные гармоники на множестве точек коллокаций $\{\chi_l\}_{l=1}^L \subset \mathfrak{J}$ на образующей частицы и решая полученную переопределенную систему линейных уравнений. При этом для вычисления в точках коллокаций предельных значений поля при подходе к поверхности тела D_i извне приходится применять численные алгоритмы вычисления интегралов Зоммерфельда (5)–(6).

Несмотря на различие в представлениях для приближенного решения, зависящего от поляризации внешнего возбуждения, удается построить вычислительный алгоритм таким образом, что при вычислении амплитуд дискретных источников для каждой азимутальной гармоники как для P -, так и для S -поляризации достаточно использовать псевдообращение одной и той же матрицы [1]. Системы же для не зависящей от ϕ гармоники, соответствующей вертикальным диполям (они оказываются в два раза меньшей размерности), приходится решать дважды, для P - и S -поляризаций отдельно.

Для вычисления интенсивности рассеянного поля на бесконечности необходимо иметь диаграмму рассеяния. Она определяется известным образом:

$$\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|\mathbf{E}^0(\mathbf{r})|} = \frac{\exp\{-ik_0 r\}}{r} \mathbf{F}(\theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Для получения конкретного вида диаграммы рассеяния достаточно использовать асимптотические представления для интегралов Зоммерфельда [6]:

$$\int_0^{\infty} J_m(\lambda \rho) f(\lambda) \exp\{-\eta_0(z - w_n)\} \lambda^{1+m} d\lambda = \psi_0 ik_0 \cos \theta (ik_0 \sin \theta)^m G_n f(k_0 \sin \theta) + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

где

$$\psi_0 = \frac{\exp\{-ik_0 r\}}{r}, \quad G_n = \exp\{-ik_0 w_n \cos \theta\}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2.$$

Тогда для θ, ϕ -компонент диаграммы рассеяния в случае P -поляризации имеем

$$F_{\theta}^P = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sum_{m=0}^M \cos(m+1)\phi (ik_0 \sin \theta)^m \times \sum_{n=1}^N \left\{ p_{nm}^0 [G_{nm}^e \cos \theta + ik_0 \sin^2 \theta F_m] + q_{nm}^0 G_{nm}^h \right\} - \frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sin \theta \sum_{n=1}^N r_n^0 G_{n0}^h \frac{\mu_0}{\mu_f},$$

$$F_{\phi}^P = -\frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sum_{m=0}^M \sin(m+1)\phi (ik_0 \sin \theta)^m \times \sum_{n=1}^N \left\{ p_{nm}^0 G_{nm}^e + q_{nm}^0 [G_{nm}^h \cos \theta + ik_0 \sin^2 \theta F_m] \right\},$$

а для S -поляризации

$$F_{\theta}^S = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sum_{m=0}^M \sin(m+1)\phi (ik_0 \sin \theta)^m \times \sum_{n=1}^N \left\{ p_{nm}^0 [G_{nm}^e \cos \theta + ik_0 \sin^2 \theta F_m] - q_{nm}^0 G_{nm}^h \right\},$$

$$F_{\phi}^S = \frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sum_{m=0}^M \cos(m+1)\phi (ik_0 \sin \theta)^m \times \sum_{n=1}^N \left\{ p_{nm}^0 G_{nm}^e - q_{nm}^0 [G_{nm}^h \cos \theta + ik_0 \sin^2 \theta F_m] \right\} + \frac{ik_0}{\varepsilon_0} \sin \theta \sum_{n=1}^N r_n^0 G_{n0}^e \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_f}.$$

Здесь спектральные функции $G_{nm}^{e,h}, F_m$ имеют следующий вид:

$$G_{nm}^{e,h} = ik_0 \cos \theta \exp\{ik_0 \cos \theta d\} A_{11}^{e,h}(k_0 \sin \theta, w_n, d), \\ F_m = ik_0 \cos \theta \exp\{ik_0 \cos \theta d\} A_{31}(k_0 \sin \theta, w_n, d).$$

Таким образом, формулы для диаграмм не содержат интегралов Зоммерфельда и легко вычисляются после определения неизвестных амплитуд ДИ.

Апостериорная оценка погрешности полученных результатов проводилась путем вычисления невязки граничных условий на поверхности частицы в норме l_2 . В приводимых ниже результатах относительная погрешность не превышает 2–3%.

3. Численные результаты

Будем рассматривать сферическую частицу, диаметр которой не превышает толщины слоя. Приведенные ниже результаты расчетов соответствуют длине падающей плоской волны $\lambda = 0,488$ мкм. На рис. 2–4 представлены зависимости интенсивности рассеянного света от угла наблюдения θ в плоскости, образованной полуплоскостями $\phi = 0^\circ$ и $\phi = 180^\circ$ (плоскость падения волны),

$$I^{P,S}(\theta, \phi) = \left| F_{\theta}^{P,S}(\theta, \phi) \right|^2 + \left| F_{\phi}^{P,S}(\theta, \phi) \right|^2.$$

Слой расположен на плоской поверхности подложки из силикона ($n = 4,5 - 0,4i$). В качестве слоя рассмотрен наиболее употребимый на практике материал — SiO_2 ($n = 1,44$).

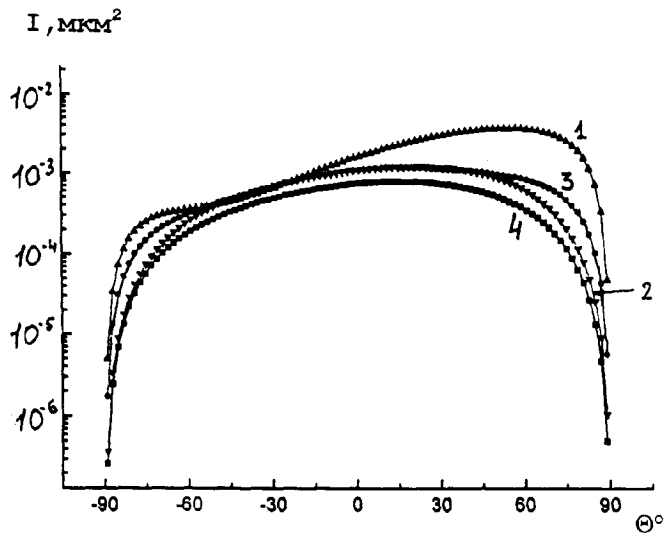


Рис. 2. Рассеяние от частицы из силикона ($n = 4,5 - 0,4i$) диаметром $D = 0,1$ мкм в случае отсутствия слоя для P - (1) и S -поляризации (2) и в случае наличия слоя толщиной $d = 0,2$ мкм для P - (3) и S -поляризации (4)

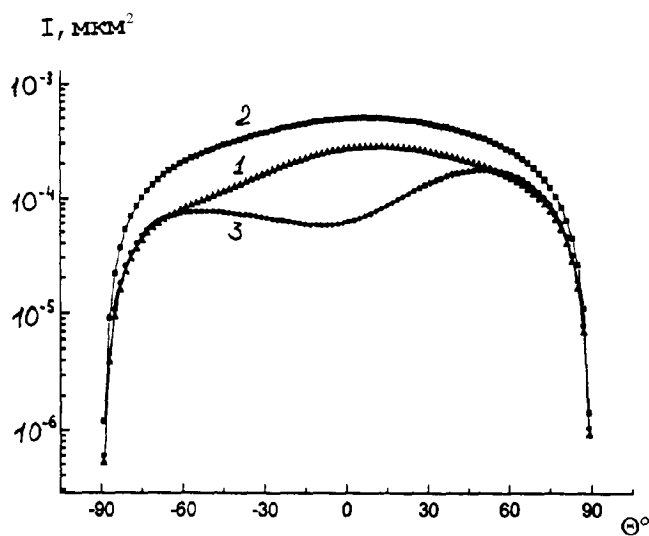


Рис. 3. Рассеяние от частицы из железа ($n = 1,35 - 1,97i$) диаметром $D = 0,1$ мкм в слое, лежащей на подложке (1) и приподнятой над поверхностью подложки на высоту $h = 0,05$ (2) и $0,1$ мкм (3) в случае P -поляризации

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

1. Наличие слоя приводит к существенному изменению поля, рассеянного частицей (рис. 2).
2. Интенсивность рассеянного поля в случае P -поляризации больше, чем в случае S -поляризации (рис. 2).
3. При изменении положения частицы внутри слоя происходит заметное искажение диаграммы (рис. 3).
4. Интенсивность рассеянного поля в основном уменьшается с увеличением угла падения (рис. 4).

На основе предложенного алгоритма рассчитано отношение рассеянной энергии к потоку энергии через поверхность частицы (в процентах) для случаев P - и S -поляризации (таблица).

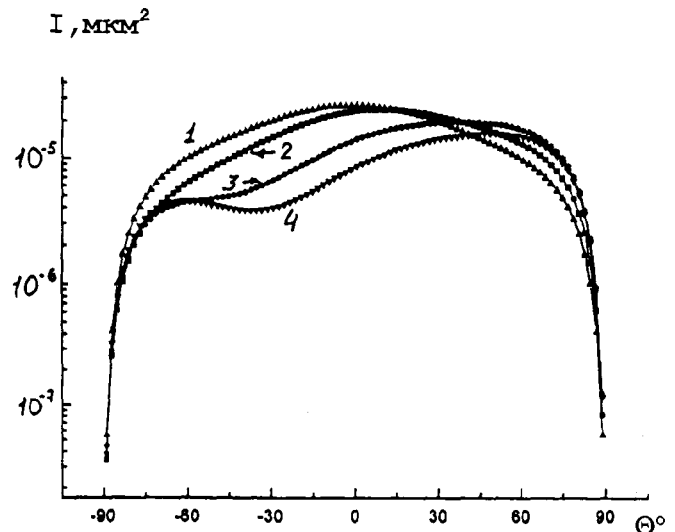


Рис. 4. Рассеяние от силиконовой частицы диаметром $D = 0,06$ мкм в слое для разных углов падения плоской волны: нормальное падение (1), $\gamma = -15^\circ$ (2), -45° (3) и -65° (4) в случае P -поляризации

Угол падения $\gamma, ^\circ$	Si		Fe		Al	
	P	S	P	S	P	S
0,0	24,7	24,7	23,4	23,4	20,2	20,2
5,0	24,6	24,6	23,4	23,4	20,2	20,2
10,0	24,5	24,6	23,2	23,4	20,1	20,2
15,0	24,2	24,5	23,0	23,5	20,1	20,2
20,0	23,8	24,5	22,7	23,5	20,0	20,2
25,0	23,3	24,3	22,2	23,6	19,8	20,3
30,0	22,6	24,2	21,6	23,6	19,7	20,3
35,0	21,8	24,1	20,9	23,7	19,4	20,3
40,0	21,0	23,9	20,1	23,7	19,2	20,4
45,0	20,0	23,7	19,1	23,8	18,8	20,5
50,0	19,2	23,5	18,1	23,9	18,5	20,5
55,0	18,1	23,4	17,1	23,9	18,0	20,5
60,0	17,3	23,2	16,1	24,0	17,6	20,6
65,0	16,6	23,1	15,1	24,0	17,2	20,6
70,0	15,7	23,0	14,3	24,1	16,8	20,6
75,0	15,3	22,9	13,7	24,1	16,5	20,7
80,0	14,8	22,9	13,2	24,1	16,2	20,7
85,0	14,6	22,7	12,9	24,2	16,1	20,7

Угол падения отсчитывается от нормали к подложке.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01081).

Литература

1. Еремин Ю.А., Орлов Н.В., Свешников А.Г. // Матем. моделирование. 1996. №10. С. 113.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.

3. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.
4. Дмитриев В.И. Поля в слоистых средах. М., 1963.
5. Еремин Ю.А., Орлов Н.В., Свешников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1995. 35, №6. С. 918.
6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. Т. 1.

Поступила в редакцию
08.12.97

УДК 519.6:616+518.0

ОБ УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫХ ПОСТАНОВКАХ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, Д. Г. Полянин, С. В. Родионов

(кафедра математики)

На примере двух задач из иммунологии и сейсмологии обсуждаются возможности их естественной условно-корректной постановки и алгоритмики. Даны результаты математического эксперимента по оценке модуля непрерывности.

Сформулированное в работе [1] понятие условно-корректной (корректной по А. Н. Тихонову) постановки задачи обобщает теорему Тихонова [2], обосновывающую метод подбора при решении обратных задач типа интерпретации данных физического эксперимента. Такие задачи приводят к операторному уравнению

$$Az = u, z \in Z, u \in U,$$

где Z и U — некоторые метрические пространства, и обычно являются неустойчивыми в своей первичной постановке, т. е. при отражении из U в Z , даже в том случае, если при точных входных данных обладают, и причем единственным, решением. Согласно [1], в условно-корректной постановке выделяется подмножество $\bar{Z} \subset Z$ (множество корректности), обладающее тем свойством, что а) ему заведомо принадлежит единственное при заданном $\bar{u} \in A\bar{Z}$ точное решение задачи; б) достаточно малым возмущениям \bar{u} , не выводящим z из \bar{Z} , отвечают сколь угодно малые возмущения решения.

В работе [3] указаны возможности построения множества корректности (явно или алгоритмически) путем постановки вспомогательной задачи с использованием количественной или качественной информации об искомом решении, алгоритмы решения которой обладают свойством «регуляризующих» по А. Н. Тихонову.

Представляют, однако, интерес такие обратные задачи, в которых множество корректности выделяется самой первичной постановкой, т. е. естественным образом, в отличие, например, от искусственно формулируемых при классическом подборе компактных множеств. Для их решения можно использовать обычные алгоритмы вычислительной математики.

В настоящей статье рассматриваются две такие задачи из разных прикладных областей. Устанавли-

вается корректность их постановки по А. Н. Тихонову и посредством математического эксперимента для характерных моделей решения оценивается зависимость его погрешности от погрешности входных данных — модуль непрерывности [1]. Такая оценка может быть полезна при планировании физического эксперимента, доставляющего исходные данные.

1. Иммуниет организма по отношению к вредным воздействиям обеспечивается деятельностью определенных клеток в составе крови [4], характеризуемых уровнем активности x . Распределение числа таких клеток по уровню активности $n = n(x)$ может быть описано решением задачи [5]:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)} (\lambda - k\dot{\Phi}(x)) n, \quad x > x_0, \quad n(x_0) = n_0, \quad (1)$$

где λ , k — некоторые константы, а $\Phi(x)$ — положительный функциональный параметр, соответствующий скорости спонтанного спада активности.

Решение (1) допускает экспериментальное изучение с помощью специального прибора (проточного цитометра [6]), и возникающая здесь обратная задача состоит в определении «причинной» функции $\Phi(x)$ по наблюдаемому следствию: $n = n(x)$.

В работе [5] эта задача решалась для узкого класса аналитически заданных функций Φ , зависящих от двух числовых параметров, которые и определялись. Здесь предлагается более общая постановка задачи.

Будем считать, что $\Phi(x)$ принадлежит множеству M положительных дважды дифференцируемых на $[x_0, x]$ функций, удовлетворяющих условию $\Phi(x_0) = \varphi_0$ при заданном φ_0 . Пусть \mathcal{N} — множество отображений M с помощью оператора A , разрешающего задачу (1):

$$A\Phi = n(x), \quad \Phi \in M. \quad (2)$$