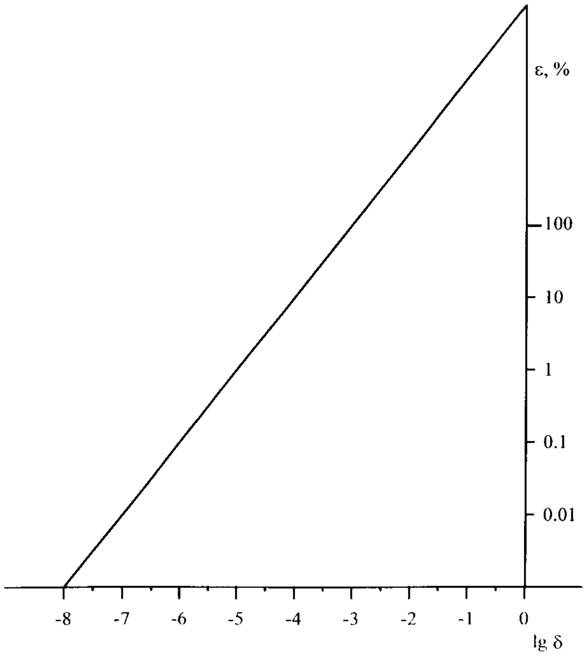

Рис 2. Модуль непрерывности для обратной задачи сейсмометрии

Погрешность результата (априорно известного в эксперименте) оценивалась по формуле

$$\varepsilon = \max_i |\xi_i - \hat{\xi}_i|. \tag{15}$$

Результат, представленный на рис. 2 в логарифмическом масштабе, относится к варианту [5] $\sigma = 0,07$; $\omega = 1,12$; $\alpha = 1,1$; $\beta = 0,7$; $V_0 = 1$; $T = 9,6$ (c). Конечная аппроксимация проводилась на равномерной сетке $\{t_j\} \subset [0, T]$ с шагом $\Delta t = T/50$.

Видно, что за пределами погрешности метода $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — практически линейная функция, а граница допустимых погрешностей эксперимента (для $\varepsilon \leqslant 70\%$) составляет $\delta = 10^{-4}$.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. Н. Земскову и Л. Н. Рыкунову за полезные обсуждения, В. М. Репину и В. Ф. Бутузову — за внимание к работе.

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1943. **39**, № 5. С. 195.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979.
4. *Бернет Ф.* Целостность организма и иммунитет. М., 1964.
5. *Васильев О.С., Гласко В.Б., Гласко Ю.В.* и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 7 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4. P. 7).
6. *Хаитов Р.М., Пинечик Б.В., Истамов Х.И.* Экологическая иммунология. М., 1995.
7. *Голицын Б.Б.* Лекции по сейсмометрии. Спб., 1912.
8. *Саваренский Е.Ф., Кирнос Д.П.* Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М., 1955.
9. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М., 1989.

Поступила в редакцию
17.12.97

УДК 530.1

ПЕРЕНОРМИРОВКА ПО ЛИНИЯМ: НОРМАЛЬНЫЕ И АНОМАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА В МОДЕЛИ ЯНГА–МИЛЛСА

Д. А. Славнов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

В рамках размерной перенормировки по линиям получено производящее уравнение для нормальных и аномальных тождеств Уорда в модели Янга–Миллса. Подтверждено, что за киральные аномалии ответственны только однопетлевые диаграммы.

В статье автора [1] была предложена новая перенормировочная схема — перенормировка по линиям. В рамках этой схемы в статьях [2, 3] представлен вариант размерной перенормировки, в котором используются только целые и положительные размерности. Наконец, в статье [4] выведено производящее уравнение для тождеств Уорда, которым подчиняются перенормированные по такой схеме функции Грина. Развитая в статье [4] общая процедура в настоящей работе используется с небольшой модификацией для получения нормальных и аномальных тождеств Уорда в конкретном случае — в модели Янга–Миллса.

Сердцевиной используемой перенормировочной процедуры является операция «перенормированного интегрирования» в импульсном (здесь предполагается евклидовом) пространстве. Для однозначного определения операции на промежуточных этапах приходится считать, что размерность 2ζ импульсного пространства достаточно высокая. Однако если при рассмотрении учитывается только конечное число диаграмм Фейнмана, то можно ограничиться конечной размерностью. Минимальная допустимая размерность определяется числом «внешних импульсов» $k_i \quad (i = 1, \ldots, m)$, фигурирующих в рассматриваемых диаграммах. В качестве таких импульсов могут выступать как собственно импульсы, так и другие внешние векторные или тензорные величины, например векторные и тензорные поля, а также «тензорные токи» (см. [3]).

Применительно к рассмотрению модели Янга–Миллса это означает, что действие S должно быть задано в пространстве конечной, но достаточно высокой размерности, минимальная величина которой зависит от порядка теории возмущений, которым мы намерены ограничиться. Будем считать, что эффективное действие имеет слегка модифицированный по сравнению со стандартным вид:

$$S = \int dp\, dp'\, \delta(p+p') \times \tag{1}$$
$$\times \left[\bar\psi(p')(i\hat p_{(\eta)} + m)\psi(p) + \frac{1}{4} F^\alpha_{\mu\nu}(p') F^\alpha_{\mu\nu}(p) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\xi} p'_\mu A^\alpha_\mu(p')\, p_\nu A^\alpha_\nu(p) - p'_\mu \bar c^\alpha(p')\, p_\mu c^\alpha(p) \right] +$$
$$+ ig \int dp\, dp'\, dq\, \delta(p+p'+q) \times$$
$$\times \left[\bar\psi(p') \hat A^\alpha_{(\eta)}(q) t_\alpha \psi(p) - f_{\alpha\beta\gamma} \bar c^\alpha(p') c^\beta(p) p_\mu A^\gamma_\mu(q) \right],$$

где
$$[t^\alpha, t^\beta] = i\, f_{\alpha\beta\gamma} t^\gamma.$$

Модификация сводится к тому, что у величин $\hat p$ и $\hat A^\alpha$ появляется параметр η. Это означает, что

$$\hat A_{(\eta)} = A_\mu \gamma^\mu_{(\eta)} \equiv A_\mu g^\mu_\nu(\eta)\gamma^\nu,$$

где внешнее тензорное поле $g^\mu_\nu(\eta)$ имеет вид

$$g^\mu_\nu(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \ne \nu, \\ 1 & \text{при} \quad \mu = \nu \leqslant 4, \\ \eta & \text{при} \quad \mu = \nu > 4 \end{cases}.$$

Введение этого тензорного поля позволит нам в нужный момент с помощью предельного перехода $\eta \to 0$ избавиться от нефизических матриц Дирака (γ^ν при $\nu > 4$). Иногда будут использоваться импульсы, зависящие от параметра η: $p^\mu_{(\eta)} = g^\mu_\nu(\eta) p^\nu$.

Общая формула для производящего функционала перенормированных функций Грина получена в статье [2]. Применительно к рассматриваемой здесь модели Янга–Миллса она выглядит так:

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \exp(\Delta^g) \times$$
$$\times \lim_{\eta\to 0} \left[\exp(\Delta^s_{(\eta)}) \exp(-W(\varphi)) C(j,\varphi)|_{\varphi^s=0} \right] \Big|_{\varphi^g=0}. \tag{2}$$

Здесь совокупность всех полей φ подразделена на два типа: спинорные $\varphi^s = \{\bar\psi,\ \psi\}$ и калибровочные $\varphi^g = \{A^\alpha_\mu,\ \bar c^\alpha,\ c^\alpha\}$, пертурбативная часть действия обозначена через $W(\varphi)$, а

$$C(j,\varphi) = \exp\left\{ \int dp\, [\bar\psi(p) j(p) + \right.$$
$$\left. + \bar j(p)\psi(p) + \sum_u j^g_u(p) \varphi^g_u(p)] \right\}. \tag{3}$$

Операторы $\Delta^s_{(\eta)}$ и Δ^g определяются формулой

$$\Delta^s_{(\eta)} = \int d\mu(p)\, \mathcal{P}(p_{(\eta)} \to p) \frac{\delta}{\delta\psi(p)} D^s_{(\eta)}(p) \frac{\delta}{\delta\bar\psi(-p)},$$
$$\Delta^g = \int d\mu(p) \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta\varphi^g_u(p)} D^g_{uv}(p) \frac{\delta}{\delta\varphi^g_v(-p)},$$

где $D^s_{(\eta)}$ и D^g_{uv} — соответствующие пропагаторы, причем индексы u, v отличают друг от друга различные калибровочные (духовые) поля. Наличие индекса (η) у спинорного пропагатора отражает тот факт, что в него входит тензорное поле $g^\mu_\nu(\eta)$. Оператор $\mathcal{P}(p_{(\eta)} \to p)$ означает, что, прежде чем выполнять перенормированное интегрирование, в подынтегральном выражении следует заменить $p_{(\eta)}$ на p.

В операторах $\Delta^s_{(\eta)}$ и Δ^g фигурирует операция перенормированного интегрирования

$$\int d\mu(p)\, F(p^2, pk_i) = \mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)(-1)^{\zeta-2}(\mu^2)^{-\epsilon}\pi^{2-\zeta+\epsilon} \times$$
$$\times \Gamma^{-1}(\epsilon) \lim_{\beta\to 0} \int d^{2\zeta}p\, (p^2+\mu^2)^{-\beta} \times \tag{4}$$
$$\times \int_0^\infty d\omega^2\, (\omega^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^{\zeta-2} F(p^2+\omega^2, pk_i),$$

которая построена в статье [2]. Особенности применения этой операции при наличии векторных и спинорных полей рассмотрены в статье [3]. Фигурирующий в (4) оператор $\mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)$ обращает в нуль все члены разложения в ряд Лорана по ϵ, кроме члена порядка ϵ^0.

Полагается, что приведенные определения операций $\mathcal{P}(p_{(\eta)} \to p)$ и перенормированного интегрирования справедливы тогда, когда импульс p является петлевым. В этом случае перенормированное интегрирование эффективно устраняет ультрафиолетовые расходимости (см. [2]). Если импульс p распространяется по незамкнутой линии, то оператор $\mathcal{P}(p_{(\eta)} \to p)$ следует считать единичным, а перенормированное интегрирование — совпадающим с обычным.

Перенормированное интегрирование обладает свойством трансляционной инвариантности:

$$\int d\mu(p)\, F(p+q; k_1, \ldots) = \int d\mu(p)\, F(p; k_1, \ldots). \tag{5}$$

Это свойство вытекает из доказанной в статье [2] эквивалентности перенормированного интегрирования и размерной регуляризации в версии Вильсона [5], для которой такое свойство имеет место (см. [6]).

Вернемся к действию (1). Легко убедиться, что оно инвариантно относительно обычных БРСТ-преобразований [7, 8]:

$$\delta\psi(p) \quad = \quad i\, g\, t_\alpha \int dq\, c^\alpha(p-q)\psi(q)\delta\lambda, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\psi}(p) &= i\,g\int dq\,\bar{\psi}(q)t_\alpha c^\alpha(p-q)\delta\lambda,\\
\delta A^\alpha_\mu(p) &= ip_\mu c^\alpha(p)+g\,f_{\alpha\beta\gamma}\int dq\,c^\beta(p-q)A^\gamma_\mu(q)\delta\lambda,\\
\delta c^\alpha(p) &= -\frac{1}{2}\,g\,f_{\alpha\beta\gamma}\int dq\,c^\beta(p-q)c^\gamma(q)\delta\lambda,\\
\delta\bar{c}^\alpha(p) &= -\frac{i}{\xi}\,p_\mu A^\alpha_\mu\delta\lambda.
\end{aligned}$$

Если для вариаций полей ввести единое обозначение

$$\delta\varphi^n_v(p)=f^n_v(p,\varphi)\delta\lambda \qquad (n=g,s), \tag{7}$$

то вариацию действия можно записать в виде

$$\delta S(\varphi)=\int dp\sum_{n,v}\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi^n_v(p)}f^n_v(p,\varphi)\delta\lambda. \tag{8}$$

Вывод производящего уравнения для тождеств Уорда дан в статье [4], в которой, правда, не учитывалась возможность введения в действие дополнительного тензорного поля $g^\mu_\nu(\eta)$ и предельного перехода $\eta\to 0$. Однако приведенный там вывод практически буквально распространяется и на этот случай. В результате получается следующая формула для производящего уравнения:

$$\begin{gathered}
\mathcal{N}^{-1}\int d\mu(p)\,\exp(\Delta^g)\lim_{\eta\to 0}\exp(\Delta^s_{(\eta)})\exp(-W(\varphi))\times\\
\times C(j,\varphi)\sum_{n,v}\left[j^n_v(p)-\frac{\delta W_1(\varphi)}{\delta\varphi^n_v(p)}\right]f^n_v(p,\varphi)\bigg|_{\varphi=0}=R,
\end{gathered}\tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}
R=\mathcal{N}^{-1}\int d\mu(p)\exp(\Delta^g)\lim_{\eta\to 0}\exp(\Delta^s_{(\eta)})\times\\
\times\exp\{-W(\varphi)\}\,C(j,\varphi)\sum_{n,v}\frac{\delta S_0(\varphi)}{\delta\varphi^n_v(p)}f^n_v(p,\varphi)\bigg|_{\varphi=0}.
\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь $S_0(\varphi)$ — инвариантная относительно преобразований классических полей часть действия. Соответственно в формуле (9) $W_1(\varphi)=S(\varphi)-S_0(\varphi)$. В случае БРСТ-преобразований (6) $S(\varphi)=S_0(\varphi)$ и $W_1(\varphi)=0$.

Сравним правые части формул (8) и (10). Основное их отличие заключается в том, что в формуле (10) вариация действия $S_0(\varphi)$ подвергается многократному воздействию операторов Δ^g и $\Delta^s_{(\eta)}$. Эти операторы заменяют в $S_0(\varphi)$ классические поля φ на соответствующие пропагаторы, которые при больших импульсах ведут себя значительно хуже, чем поля φ. Однако одновременно с этим в формуле (10) обычное интегрирование $\int dp$ заменено на перенормированное интегрирование $\int d\mu(p)$. Кроме того, в операторах Δ^g и $\Delta^s_{(\eta)}$ также фигурируют операции перенормированного интегрирования, которые как раз определены на произведениях пропагаторов.

Обращение в нуль вариации действия $S_0(\varphi)$ при преобразованиях (6) является следствием трансляционной инвариантности обычного интегрирования $\int dp$, фигурирующего в формуле (8). Поскольку имеющаяся в формуле (10) операция перенормированного интегрирования также трансляционно инвариантна, то и правая часть формулы (10) обращается в нуль.

Таким образом, в формуле (9) следует положить $W_1=0, \quad R=0$. После этого она превратится в производящее уравнение для тождеств Уорда для перенормированных функций Грина. Для того чтобы можно было трактовать это уравнение как некое уравнение для производящего функционала Z, следует ввести помимо источников j^n_v элементарных полей φ^n_v источники J^n_v составных полей ϕ^n_v. Дело в том, что преобразования (6) нелинейны относительно полей φ. В них фигурируют квадратичные комбинации полей. Эти комбинации следует рассматривать как составные поля ϕ^n_v и переписать формулу (7) в виде

$$\delta\varphi^n_v(p)=[f^n_{1v}(p;\varphi)+f^n_{2v}(p;\phi)]\,\delta\lambda,$$

где $f^n_{1v}(p;\varphi)$ и $f^n_{2v}(p;\phi)$ линейны относительно φ и ϕ соответственно.

После этого следует ввести производящий функционал $Z(j,J)$, определяемый формулой (2), в которой $C(j,\varphi)$ заменено на $C(j,\varphi;J,\phi)$. В свою очередь $C(j,\varphi;J,\phi)$ определяется формулой (3), в которой к подынтегральному выражению добавляется $\sum_{n,v}J^n_v(p)\phi^n_v(p)$.

Всегда можно полагать источники $j^n_v(p)$ и $J^n_v(p)$ достаточно хорошими функциями и считать импульс p (на диаграмме Фейнмана) вытекающим из одного из этих источников. Поскольку для непетлевых импульсов перенормированное интегрирование совпадает с обычным, то уравнению (9) (при $W_1=0$, $R=0$) можно придать вид

$$\int dp\sum_{n,v}j^n_v(p)\left[f^n_{1v}(p;\frac{\delta}{\delta j})+f^n_{2v}(p;\frac{\delta}{\delta J})\right]Z(j,J)\Big|_{J=0}=0.$$

Рассмотрим теперь локальное киральное преобразование

$$\begin{aligned}
\delta\psi(p)&=g\int dq\,\gamma_5\psi(p-q)\delta\lambda(q),\\
\delta\bar{\psi}(p)&=g\int dq\,\bar{\psi}(p-q)\gamma_5\delta\lambda(q).
\end{aligned}\tag{11}$$

На классическом уровне ему соответствует (частичное) сохранение аксиального тока. Однако на квантовом уровне даже в электродинамике оно приводит к аномалиям Адлера [9]. Аномалии обусловлены наличием в преобразовании (11) γ_5-матриц.

В четырехмерном пространстве матрица γ_5 определяется через полностью антисимметричный тензор $\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$. Следуя работе [10], будем рассматривать его как постоянное внешнее поле. Так как в перенормированном интегрировании приходится использовать пространство большей размерности 2ζ, то

$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ следует продолжить на такое пространство. Продолжение может быть осуществлено различными способами, что сводится к конечной перенормировке. Выберем простейший вариант. В качестве продолжения возьмем постоянное внешнее полностью антисимметричное тензорное четвертого порядка поле, у которого отличны от нуля только физические компоненты, причем компонента $E_{1234}=1$. С помощью этого поля матрица γ_5 определяется следующим образом:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\, E_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}.$$

Ясно, что γ_5 антикоммутирует с матрицами γ^μ при $\mu = 1,2,3,4$ и коммутирует при $\mu > 4$.

Слагаемое в действии (1), пропорциональное спинорной массе, нарушает киральную инвариантность уже на классическом уровне. Это проявится в том, что в правой части (9) возникнет член

$$\sum_{n,v} \frac{\delta W_1(\varphi)}{\delta \varphi_v^n(p)} f_v^n(p,\varphi) = -2m\, g\, \bar\psi(q-p)\gamma_5\psi(p).$$

Параллельно этому появятся квантовые аномалии, так как в данном случае величина R окажется отличной от нуля. Поскольку в преобразованиях (11) участвуют только спинорные поля, то в формулах (9) и (10) перенормированное интегрирование $\int d\mu(p)$ можно совершать сразу после действия оператора $\exp(\Delta^s_{(\eta)})$. Поэтому в данном случае для R получится выражение

$$R = \mathcal{N}^{-1}\exp(\Delta^g)\lim_{\eta\to 0} Q(\varphi^g, j^s) C(j^g,\varphi^g)|_{\varphi^g=0}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} Q \;=\; & \int d\mu(p)\,\exp(\Delta^s_{(\eta)})\exp\{-W(\varphi)\}\times \qquad (13)\\ & \times C(j^s,\varphi^s)\, i\, g\, \bar\psi(q-p)\{\gamma_5,\gamma^\nu_{(\eta)}\}\times \\ & \times\left[p_\nu\psi(p) + g\int dk\, A^\alpha_\nu(k)\, t_\alpha \psi(p-k)\right]_{\varphi^s=0}. \end{aligned}$$

Графически выражение Q можно изобразить в виде совокупности диаграмм Фейнмана, которые состоят из замкнутых спинорных циклов и незамкнутых спинорных треков. Последние соединяют между собой спинорные токи $\bar j^s$ и j^s. Кроме того, имеются внешние линии, соответствующие калибровочным полям φ^g. Внутренних таких линий нет, поэтому как спинорные циклы, так и спинорные треки между собой не соединяются.

Фигурирующая в правой части формулы (13) матрица Дирака $\gamma^\nu_{(\eta)}$ может оказаться либо на одном из циклов, либо на треке. Во втором случае после предельного перехода $\eta\to 0$ антикоммутатор $\{\gamma_5,\gamma^\nu_{(\eta)}\}$ обратится в нуль и соответствующее слагаемое из Q вклада в R не даст. То же самое произойдет, когда $\gamma^\nu_{(\eta)}$ принадлежит циклу, но сворачивается с полем $A^\alpha_\nu(k)$ (второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (13)).

Ситуация будет другой, когда $\gamma^\nu_{(\eta)}$ принадлежит циклу и сворачивается с p_ν (первое слагаемое в квадратных скобках в (13)). В этом случае после вычисления шпуров и замены $p_{(\eta)}\to p$ возникнут слагаемые, пропорциональные p^2. Согласно формуле (4) при вычислении перенормированного интеграла к p^2 нужно добавить ω^2. Если в формуле (4) интеграл по p сходится при $\beta=0$, то операция $\mathcal{L}(\epsilon\downarrow 0)\,\Gamma^{-1}(\epsilon)\int d\omega^2\,(\omega^2)^{\epsilon-1}\ldots$ эквивалентна операции $\int d\omega^2\,\delta(\omega^2)\ldots$ (см. [11]). Соответственно член, пропорциональный ω^2, вклада в Q не даст, и аномалий не будет. Однако если упомянутый интеграл расходится, то вклад в Q будет конечным даже при $\eta\to 0$.

Этот вклад является причиной возникновения аномалий. В рассматриваемой модели, в отличие от электродинамики, вклад в аномалии будут давать циклы не только с тремя звеньями, но также и с пятью. Только эти однопетлевые диаграммы дают вклад в аномалии.

Поскольку в формуле (12) имеется операция предельного перехода $\eta\to 0$, то никаких других киральных аномалий возникнуть не может, так как после этого предельного перехода «выживают» только физические γ-матрицы.

Последнее имеет еще одно следствие, которое надо учитывать при вычислении последующих перенормированных интегралов, соответствующих внутренним калибровочным линиям. Дело в том, что подынтегральное выражение может зависеть как от k^2, так и от $\mathbf{k}^2 = k_\mu k_\nu g^\mu_\nu$ $(\eta=0)$. Величину k^2 следует рассматривать как свертку импульса интегрирования с внешним тензором. Поэтому при вычислении перенормированного интеграла добавлять ω^2 нужно только к k^2, но не к $\mathbf{k}^2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1997. **110**. С. 399.
2. *Славнов Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1).
3. *Славнов Д.А.* // Там же. № 2. С. 15 (Ibid. No. 2).
4. *Славнов Д.А.* // Там же. № 6. С. 10 (Ibid. No. 6).
5. *Wilson K.G.* // Phys. Rev. 1973. **D7**. P. 2911.
6. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М., 1988; *Collins J.C.* Renormalization. Cambridge University Press, 1984.
7. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Comm. Math. Phys. 1975. **42**. P. 127.
8. *Тютин И.В.* // Препринт ФИАН № 39. М., 1975.
9. *Adler S.L.* // Phys. Rev. 1969. **177**. P. 2426.
10. *Селихов А.В., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1986. **67**. С. 186.
11. *Ильин В.А., Имашев М.С., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1982. **52**. С. 177.

Поступила в редакцию
28.11.97