исходного, можно было дать простое статистическое объяснение. Этим снималась необходимость обсуждения загадочного процесса коллапса волновой функции.

Полученные выше, не имеющие классического объяснения, свойства АПР импульса, насколько известно автору, не проверялись ни в одном из экспериментов.

Основой таких экспериментов могла бы быть описанная в [9] изящная техника эксперимента с атомными пучками. Она позволила достаточно надежно реконструировать функцию Вигнера прошедшего через две щели пучка атомов гелия. Если такую установку удастся дополнить каким-либо косвенным измерением поперечной координаты атомов за щелью, то можно будет проверить описанный выше эффект редукции волновой функции при измерении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16391-а).

Литература

1. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М., 1964.
2. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М., 1964.
3. *В. Гейзенберг.* Физические принципы квантовой теории. Л.; М., 1932.
4. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.
5. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* Quantum Measurements. Cambridge, 1992.
6. *Воронцов Ю.И.* Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
7. *Pegg D.T., Barnett S.M.* // Phys. Rev. 1989. **A39**. P. 1665.
8. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М., 1989.
9. *Kurtsiefer Ch., Pfau T., Mlynek J.* // Nature. 1997. **386**. P. 150.

Поступила в редакцию
26.12.97

УДК 539.12.01

ДИРАКОВСКИЙ ФЕРМИОН В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В 2+1 ИЗМЕРЕНИЯХ

В. Р. Халилов

(*кафедра теоретической физики*)

Изучается эффект образования пар заряженных фермионов сильным внешним кулоновским полем в двух пространственных измерениях. Найдены точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле в 2+1 измерениях. Показано, что поведение нижних уровней энергии электрона в сильном кулоновском поле существенно различно для случаев двух и трех пространственных измерений. Получено уравнение для определения критического заряда, которое решено численно для одной простой модели. Критический заряд в 2+1 измерениях существенно меньше его значения для той же модели в 3+1 измерениях.

Двумерные системы нерелятивистских заряженных фермионов, связанные с калибровочными электромагнитным и Черна–Саймонса полями, привлекают значительный интерес в последние годы в связи с их весьма необычными свойствами, которые позволили применить эти модели к изучению таких квантовых макроскопических явлений, как дробный квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [1, 2]. Некоторые эффекты в физике конденсированных сред указывают на то, что не только (2+1)-мерные нерелятивистские фермионные системы, но также (2+1)-мерные системы со спектром энергий, который определяется гамильтонианом уравнения Дирака, по-видимому, существуют [3–5]. Свойства квантовых (2+1)-мерных систем частиц вызывают и чисто теоретический интерес в связи с теорией анионов — частиц, подчиняющихся дробной статистике в 2+1 измерениях [2]. Это является мотивацией настоящей работы.

Здесь мы найдем точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле для электрона, считая, что его движение ограничено в плоскости, и обсудим эффект рождения пар заряженных фермионов (т. е. электронов и позитронов) из вакуума сильным кулоновским полем в 2+1 измерениях, предсказанный в работе [6] и всесторонне исследованный в работах [7–13] для случая 3+1 измерений.

Нелишне напомнить, что в (3+1)-мерной квантовой механике выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда $Z|e|$ теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, т. е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [13]. С точки зрения физики рассмотрение обрезанного кулоновского потенциала эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала впервые был исследован в работе [13]. Оказалось, что с ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии электрона становятся отрицательными и продолжают опускаться до границы нижнего континуума $-m$. Значение $Z = Z_{\rm cr}$, при котором нижний уровень энергии электрона достигает границы нижнего континуума, называют критическим для основного состояния [10–12]. Если $Z > Z_{\rm cr}$, то основной уровень энергии электрона "погружается " в нижний континуум, и если этот уровень не был заполнен, то в результате возникшего квазистационарного состояния рождаются два позитрона, которые под действием кулоновского отталкивания уходят на бесконечность, а вакуум квантовой электродинамики (КЭД), возмущенный сверхкритическим кулоновским полем, приобретает заряд $2e$ [10–12]. В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Квантовомеханическая задача о движении релятивистского электрона с массой m и зарядом $e = -e_0$, $e_0 > 0$ в двух пространственных измерениях во внешнем кулоновском поле, моделирующем поле тяжелого ядра, может быть решена точно. Вектор-потенциал кулоновского поля в декартовых координатах зададим так:

$$A^0(r) = -Ze_0/r, \quad A^x = A^y = 0. \tag{1}$$

Поскольку (см., напр., [3]) в 2+1 измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена в терминах матриц Паули, выберем представление $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^k = i\sigma^k$ и запишем уравнение Дирака в виде

$$(i\partial_t - H_D)\Psi = 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} H_D = \alpha\mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \\ \equiv \sigma^1 P_2 - \sigma^2 P_1 + \sigma^3 m + eA^0, \end{gathered} \tag{3}$$

а $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ — оператор обобщенного импульса электрона.

Решение уравнения (2) в поле (1) будем искать в полярных координатах r, φ в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\epsilon Et + il\varphi)\psi(r, \varphi), \tag{4}$$

где $\epsilon = \pm 1$ — знак, $E > 0$ — абсолютное значение энергии, l — целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (2) и учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -ie^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{6}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{df}{dr} - \frac{l}{r}f + (\epsilon E + m + \frac{Z\alpha}{r})g = 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1+l}{r}g - (\epsilon E - m + \frac{Z\alpha}{r})f = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Точное решение уравнения Дирака и дискретный спектр энергий $\epsilon E < m$ можно найти в полной аналогии с вычислениями [14]. Для этого будем искать функции f и g в виде [14]:

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m+E}\, \mathrm{e}^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1}(Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{m-E}\, \mathrm{e}^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1}(Q_1 - Q_2), \end{aligned} \tag{8}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} \rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \\ \gamma = 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \alpha \equiv e^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Нелишне отметить, что величину γ мы нашли, исследуя поведение волновых функций при малых r, и что справедливо равенство $(\gamma - 1/2)^2 - (Z\alpha E/\lambda)^2 = (l+1/2)^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$.

Далее, проводя преобразования системы уравнений (7) в соответствии со случаем трех пространственных измерений, нетрудно выразить их решение, конечное при $\rho = 0$, через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - 1/2 - (Z\alpha E/\lambda), 2\gamma; \rho), \\ Q_2 &= BF(\gamma + 1/2 - (Z\alpha E/\lambda), 2\gamma; \rho), \end{aligned} \tag{10}$$

причем связь между постоянными A и B определяется соотношением

$$B = \frac{\gamma - 1/2 - Z\alpha E/\lambda}{l + 1/2 + Z\alpha m/\lambda} A. \tag{11}$$

Спектр энергий определяется из уравнения

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} = -n_r, \tag{12}$$

причем нетрудно показать, что допустимы следующие значения квантового числа n_r: $0, 1, 2, \ldots$ при $l \geqslant 0$ и $1, 2, 3, \ldots$ при $l < 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий электрона в поле (1) имеет вид

$$E = m\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n_r + \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2})^2}\right]^{-1/2}. \tag{13}$$

Этот спектр энергий похож на спектр энергий скалярной заряженной частицы в кулоновском поле в трех пространственных измерениях, так как в (2+1)-мерной квантовой теории электрон ведет себя подобно бесспиновому фермиону. Однако между спектрами истинного бозона и бесспинового электрона есть существенное отличие. Так, энергия электрона на низшем уровне ($l = n_r = 0$) равна

$$E_0 = m\sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}. \tag{14}$$

Энергия E_0 нижнего уровня обращается в нуль при $Z\alpha = 1/2$. Напомним, что в трех пространственных измерениях энергия фермиона E_0 обращается в нуль при $Z\alpha=1$, а энергия бесспиновой заряженной частицы на нижнем уровне при $Z\alpha=1/2$ равна $m/\sqrt{2}$. Выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Соответствующие волновые функции осциллируют при $r\to 0$, вследствие чего отсутствует граничное условие в начале координат [10–12].

Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r=0$, т. е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [13], что с точки зрения физики эквивалентно учету конечных размеров ядра. Предполагая, что в случае двух пространственных измерений с ростом Z в области $2Z>137$ поведение уровней энергии электрона аналогично трехмерному случаю, т. е. они становятся отрицательными и опускаются до границы нижнего континуума $-m$, покажем, что такая ситуация действительно имеет место.

Для этого рассмотрим решения и спектр уравнения Дирака в области $2Z>137$ и определим соответствующее значение Z_{cr}. Поскольку для определения Z_{cr} мы должны рассматривать энергии вблизи границы нижнего континуума $-m$, уравнение Дирака запишем с учетом того, что $\epsilon E\approx -m$. Вводя функции $F(r)=rf(r)$ и $G(r)=rg(r)$ и исключая из системы (7) $G(r)$, приходим к уравнению, определяющему функцию F вблизи границы нижнего континуума $-m$ в виде

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2}+\left(E^2-m^2+\frac{2\epsilon EZ\alpha}{r}+\right.\\ \left.+\frac{(Z\alpha)^2-l(l+1)}{r^2}\right)F(r)=0. \tag{15}$$

Заметим, что вблизи границы верхнего континуума, т.е. при $\epsilon E\approx m$, уравнением (15) после замены $F(r)$ на $G(r)$ определяется функция $G(r)$.

Решение уравнения (15), убывающее при $r\to\infty$, выражается через функцию Уиттекера вида

$$F(r)=DW_{\beta,i\nu}(2\lambda r), \tag{16}$$

где

$$\beta=\epsilon EZ\alpha/\lambda,\quad \nu=\sqrt{(Z\alpha)^2-(l+1/2)^2},\\ \lambda=\sqrt{m^2-E^2}. \tag{17}$$

Решение для $G(r)$ вблизи $\epsilon E=-m$ находится из равенства

$$G(r)=\frac{1}{Z\alpha}\left((1+l)F-\frac{dF}{dr}\right) \tag{18}$$

с использованием рекуррентных соотношений для функций Уиттекера.

Вблизи границы верхнего континуума решение (16) с $\epsilon E=m$ описывает функцию $G(r)$. Связанное состояние электрона (при $|E|<m$ или $\lambda>0$) всегда локализовано в пространстве, независимо от того, находится ли это связанное состояние вблизи верхнего или нижнего континуума. Это легко установить, используя асимптотическое представление для функций Уиттекера для больших значений аргумента $|z|$ в виде

$$W_{\beta,\nu}(z)\sim \mathrm{e}^{-z/2}(z)^{\beta}. \tag{19}$$

Такое поведение волновых функций связанного состояния электрона легко объяснить, рассматривая уравнение (15) как одномерное уравнение Шрёдингера, описывающее некоторую частицу с эффективной энергией $E'=(E^2-m^2)/2m$ в поле с эффективным потенциалом

$$U_{\mathrm{eff}}(r)=-\epsilon EZ\alpha/mr-(Z\alpha)^2/2mr^2.$$

Отметим, что в случае $\epsilon E=-m$ эффективный потенциал является потенциалом с широким барьером (о поведении эффективного потенциала в (3+1)-мерном случае см., напр., [12]). Нелишне подчеркнуть, что в 2+1 измерениях эффективный потенциал не содержит члена $-s(s+1)\equiv -3/4$, зависящего от спина электрона. Отметим также, что волновые функции осциллируют при $|E|>m$.

Значение Z_{cr} можно найти с использованием полученных точных решений. Сделаем это для простой модели, задавая потенциал в виде

$$A_0^Z(r)=-Ze_0/r,\quad r\geqslant R;\\ A_0^Z(r)=-Ze_0/R,\quad r\leqslant R. \tag{20}$$

В области $r\leqslant R$ уравнение для функции $F(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2F}{dr^2}-\frac{dF}{rdr}+\\ +\left(\left(\epsilon E+\frac{Z\alpha}{R}\right)^2-m^2+\frac{1-l^2}{r^2}\right)F(r)=0, \tag{21}$$

решение которого выражается через функции Бесселя $(J_n(z))$ и функции Неймана $(N_n(z))$ целочисленного индекса n следующим образом [15]:

$$F(r)=r(A_1J_{|l|}(\varkappa r)+B_1N_{|l|}(\varkappa r)), \tag{22}$$

где

$$\varkappa=\sqrt{\left(\epsilon E+\frac{Z\alpha}{R}\right)^2-m^2}. \tag{23}$$

Для конечности $F(r)$ при $r=0$ необходимо, чтобы $B_1=0$.

Для нахождения спектра уравнения Дирака необходимо сшить решения в точке $r=R$:

$$\left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R-0}=\left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R+0}. \tag{24}$$

В частности, в случае основного состояния $l=0$ при $\epsilon E=-m$, учитывая, что параметр R мал по сравнению с комптоновской длиной электрона $1/m$, так что можно полагать $\varkappa \approx Z\alpha/R$, получим трансцендентное уравнение, определяющее (при фиксированном R) критический заряд [16]:

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)}=\left(1-\frac{xW'_{\beta,i\nu/2}(x)}{W_{\beta,i\nu/2}(x)}\right), \qquad (25)$$

где $X=Z_{\rm cr}\alpha$, $\nu=\sqrt{(2X)^2-1}$, $\beta=-mZ\alpha/\lambda$, $x=\lambda R$ и штрих означает производную по аргументу функции Уиттекера x.

Численное решение (25) при $Rm=0,03$ и 0,02 дает соответственно $Z_{\rm cr}\approx 89, 84$ [16], что значительно меньше, чем для аналогичной модели в 3+1 измерениях, где, например, значение критического заряда при $Rm=0,03$ равно $Z_{\rm cr}\approx 170$ [10–12]. Отметим также, что с уменьшением R уменьшается и $Z_{\rm cr}$.

Следовательно, вакуум (2+1)-мерной КЭД в сильном кулоновском поле должен проявлять неустойчивость по отношению к образованию электрон-позитронных пар при существенно меньших значениях критического заряда, чем в (3+1)-мерной КЭД. Свойства вакуума (2+1)-мерной КЭД и связь модели с теорией Черна–Саймонса будут рассмотрены в другой статье.

Литература

1. The Quantum Hall Effect. 2nd ed. / Eds. R.E. Prange, S.M. Girvin. New York, 1990.
2. *Wilczek F.* Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore, 1990.
3. *Neagu A., Schakel A.M.J.* // Phys. Rev. 1993. **D48**. P. 1785.
4. *Schakel A.M.J.* // Phys. Rev. 1991. **D43**. P. 1428.
5. *Schakel A.M.J., Semenoff C.W.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 2653.
6. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
7. *Reinhardt J., Greiner W.* // Rep. Progr. Phys. 1977. **40**. P. 219.
8. *Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A.* // Phys. Reports. 1978. **C38**. P. 227.
9. *Soffel M., Müller B., Greiner W.* // Ibid. 1982. **C85**. P. 51.
10. *Зельдович Я.Б., Попов В.С.* // УФН. 1971. **105**. С. 403.
11. *Мигдал А.Б.* Фермионы и бозоны в сильных полях. М., 1978.
12. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М., 1988.
13. *Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya.* // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
14. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1980.
15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
16. *Khalilov V.R., Ho C.L.* // Mod. Phys. Lett. 1998. **A13**. P. 615.

Поступила в редакцию
29.12.97

УДК 534:517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Аналитически показано, что в цепочке из параметрически линейно сцепленных квадратичных отображений наблюдается явление глобальной синхронизации, т.е. стремление системы к тривиальному равновесному состоянию.

Введение

Развитие качественнной теории дифференциальных уравнений показывает, что поведение многих физических, химических и ряда других *распределенных* систем может быть эффективно смоделировано сетью (или решеткой) отображений, т.е. популяцией взаимодействующих подсистем. Такие подсистемы могут быть как детерминированными, для которых последующее состояние $\mathbf{x}_{n+1}$ единственным образом определяется последовательностью предыдущих состояний $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}, \ldots$, так и вероятностными, когда задана вероятность перехода подсистемы в новое состояние. Наиболее часто в качестве динамических систем, составляющих решетку, выбираются одномерные отображения T_a: $x \mapsto f(a,x)$, или, в терминах итераций,

$$x_{n+1}=f(x_n,a).$$

При этом связь между отображениями может осуществляться по-разному. Наиболее часто используется диффузионный вид связи (см., напр., [1–6]), когда каждый элемент (i,j) в сети взаимодействует с соседними по диффузионному закону. В двумерном случае такая связь может быть записана как

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{i,j} &= f(x_n^{i,j},a)+\\ &+d_1\Big[f(x_n^{i-1,j},a)-2f(x_n^{i,j},a)+f(x_n^{i+1,j},a)\Big]+\\ &+\ d_2\Big[f(x_n^{i,j-1},a)-2f(x_n^{i,j},a)+f(x_n^{i,j+1},a)\Big], \end{aligned}$$