В частности, в случае основного состояния $l = 0$ при $\epsilon E = -m$, учитывая, что параметр R мал по сравнению с комптоновской длиной электрона $1/m$, так что можно полагать $\varkappa \approx Z\alpha/R$, получим трансцендентное уравнение, определяющее (при фиксированном R) критический заряд [16]:

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \left(1 - \frac{xW'_{\beta,i\nu/2}(x)}{W_{\beta,i\nu/2}(x)}\right), \tag{25}$$

где $X = Z_{\rm cr}\alpha$, $\nu = \sqrt{(2X)^2 - 1}$, $\beta = -mZ\alpha/\lambda$, $x = \lambda R$ и штрих означает производную по аргументу функции Уиттекера x.

Численное решение (25) при $Rm = 0,03$ и 0,02 дает соответственно $Z_{\rm cr} \approx 89, 84$ [16], что значительно меньше, чем для аналогичной модели в 3+1 измерениях, где, например, значение критического заряда при $Rm = 0,03$ равно $Z_{\rm cr} \approx 170$ [10–12]. Отметим также, что с уменьшением R уменьшается и $Z_{\rm cr}$.

Следовательно, вакуум (2+1)-мерной КЭД в сильном кулоновском поле должен проявлять неустойчивость по отношению к образованию электрон-позитронных пар при существенно меньших значениях критического заряда, чем в (3+1)-мерной КЭД. Свойства вакуума (2+1)-мерной КЭД и связь модели с теорией Черна–Саймонса будут рассмотрены в другой статье.

Литература

1. The Quantum Hall Effect. 2nd ed. / Eds. R.E. Prange, S.M. Girvin. New York, 1990.
2. *Wilczek F.* Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore, 1990.
3. *Neagu A., Schakel A.M.J.* // Phys. Rev. 1993. **D48**. P. 1785.
4. *Schakel A.M.J.* // Phys. Rev. 1991. **D43**. P. 1428.
5. *Schakel A.M.J., Semenoff C.W.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 2653.
6. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
7. *Reinhardt J., Greiner W.* // Rep. Progr. Phys. 1977. **40**. P. 219.
8. *Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A.* // Phys. Reports. 1978. **C38**. P. 227.
9. *Soffel M., Müller B., Greiner W.* // Ibid. 1982. **C85**. P. 51.
10. *Зельдович Я.Б., Попов В.С.* // УФН. 1971. **105**. С. 403.
11. *Мигдал А.Б.* Фермионы и бозоны в сильных полях. М., 1978.
12. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М., 1988.
13. *Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya.* // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
14. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1980.
15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
16. *Khalilov V.R., Ho C.L.* // Mod. Phys. Lett. 1998. **A13**. P. 615.

Поступила в редакцию
29.12.97

УДК 534:517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Аналитически показано, что в цепочке из параметрически линейно сцепленных квадратичных отображений наблюдается явление глобальной синхронизации, т.е. стремление системы к тривиальному равновесному состоянию.

Введение

Развитие качественнной теории дифференциальных уравнений показывает, что поведение многих физических, химических и ряда других *распределенных* систем может быть эффективно смоделировано сетью (или решеткой) отображений, т.е. популяцией взаимодействующих подсистем. Такие подсистемы могут быть как детерминированными, для которых последующее состояние $\mathbf{x}_{n+1}$ единственным образом определяется последовательностью предыдущих состояний $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}, \ldots$, так и вероятностными, когда задана вероятность перехода подсистемы в новое состояние. Наиболее часто в качестве динамических систем, составляющих решетку, выбираются одномерные отображения T_a: $x \mapsto f(a, x)$, или, в терминах итераций,

$$x_{n+1} = f(x_n, a).$$

При этом связь между отображениями может осуществляться по-разному. Наиболее часто используется диффузионный вид связи (см., напр., [1–6]), когда каждый элемент (i, j) в сети взаимодействует с соседними по диффузионному закону. В двумерном случае такая связь может быть записана как

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{i,j} = f(x_n^{i,j}, a) &+ \\ &+ d_1\Big[f(x_n^{i-1,j}, a) - 2f(x_n^{i,j}, a) + f(x_n^{i+1,j}, a)\Big] + \\ &+ d_2\Big[f(x_n^{i,j-1}, a) - 2f(x_n^{i,j}, a) + f(x_n^{i,j+1}, a)\Big], \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, N$, d_1 и d_2 — коэффициенты диффузии вдоль горизонтали и вдоль вертикали решетки. Чтобы не вводить граничных условий, часто рассматривается сцепление на торе, т. е. индексы i и j определяются по модулю N. Диффузионное сцепление характерно тем, что состояние каждого элемента как бы сглаживается действием окружающих его соседей, и это сглаживание тем сильнее, чем больше коэффициенты d_1, d_2.

Другой способ введения связи — параметрический (см., напр., [7]). Тогда для двумерной решетки динамика (i, j)-го элемента может быть в общем случае записана как

$$x_{n+1}^{i,j} = f(x_n^{i,j}, a_n^{i,j}),$$

где

$$a_n^{i,j} = \varphi(a, x_n^{i,j}, x_n^{i+1,j}, x_n^{i-1,j}, x_n^{i,j-1}, x_n^{i,j+1})$$

и φ — некоторая функция. Параметрическое сцепление замечательно тем, что значение управляющего параметра a зависит от состояния элементов, соседних с выделенным. Кроме того, динамику такой решетки можно трактовать как взаимодействие выделенного элемента и некоторой окружающей его среды, и эта среда действует на выделенный элемент параметрически. В частности, к подобному виду взаимодействия сводится ряд моделей, описывающих некоторые химические и биологические системы (см. [8, 9]).

Аппроксимация исходной среды сетью сцепленных отображений позволяет разработать достаточно эффективный подход к хорошо известной проблеме самоорганизации. В данном контексте эта проблема может быть сформулирована следующим образом: почему для некоторых нелинейных сред сложное пространственно-временное состояние является более предпочтительным, чем простое однородное поведение (когда из практически однородной системa как бы самопроизвольно переходит в пространственно неоднородную), и каким образом такое состояние может реализоваться? В ряде предыдущих работ (см., напр., [10–12]) на основе *численного* анализа предлагались различные механизмы, которые приводили к возникновению достаточно сложных пространственных структур. Кроме того, изучалась возможность появления в среде определенных пространственно-временных «кластеров», состоящих из идентично функционирующих сцепленных отображений.

В данной работе проведено полностью *аналитическое* исследование одномерной сети (цепочки) параметрически связанных отображений, каждое из которых способно проявлять как регулярную, так и хаотическую динамику.

Динамика цепочки параметрически связанных квадратичных отображений

Рассмотрим в качестве элемента, из множества которых составлена одномерная сеть, квадратичное отображение

$$x \longmapsto ax(1 - x), \tag{1}$$

где $a \in [0, 4]$. Хорошо известно (см., напр., [13, 14]), что в этом диапазоне параметров такое отображение может иметь как периодический тип поведения, так и хаотический, с полным топологическим и метрическим перемешиванием. Рассмотрим одномерную сеть (т. е. цепочку) отображений вида (1), сцепленных параметрически:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto f_1(x_1, \ldots, x_N)x_1(1 - x_1), \\ x_2 &\longmapsto f_2(x_1, \ldots, x_N)x_2(1 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N &\longmapsto f_N(x_1, \ldots, x_N)x_N(1 - x_N). \end{aligned} \tag{2}$$

Для возможности аналитического рассмотрения потребуем, чтобы значения всех функций f_i не выходили за пределы интервала $[0, 1]$. Кроме того, предположим, что $f_{1+k}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \equiv f_1(x_{1+k}, x_{2+k}, \ldots, x_{N+k})$, где индексы берутся как $\bmod N{+}1$. Простейшим случаем такого вида связи будет связь каждого элемента (1) с остальными в форме линейной зависимости, т. е. $f_1 = \sum\limits_i a_i x_i$. Исследуем отдельно несколько случаев такого сцепления.

1. Связь вида $f_i = ax_{i+1}$. В этом случае динамика всей цепочки в целом может быть записана как

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto ax_2x_1(1 - x_1), \\ x_2 &\longmapsto ax_3x_2(1 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N &\longmapsto ax_1x_N(1 - x_N). \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при $a \in [0, 4]$ и начальных условиях $(x_1^0, \ldots, x_N^0) \in [0, 1]^N$ фазовая точка цепочки (3) всегда будет находиться в N-мерном кубе $[0, 1]^N$.

Рассмотрим сначала цепочку всего из двух элементов, $N = 2$:

$$F\colon \begin{cases} x_1 \longmapsto f(x_1, x_2) = x_2ax_1(1 - x_1), \\ x_2 \longmapsto g(x_1, x_2) = x_1ax_2(1 - x_2), \end{cases} \tag{4}$$

где $a \in [0, 4]$. Предположим сначала, что состояние цепочки (4) является синхронизированным, т. е. $x_1 = x_2$. Легко видеть, что это равенство определяет инвариантное многообразие для отображения (4). Поэтому при $x_1 = x_2$ оно будет одномерным:

$$x \longmapsto ax^2(1 - x). \tag{5}$$

При $0 < a < 4$ это отображение имеет одну неподвижную точку $x^{(1)} = 0$. Если же $a = 4$, то в результате касательной бифуркации появляется вторая неподвижная точка $x^{(2)} = 1/2$. Точка $x^{(1)}$ во всем диапазоне $[0, 4]$ является устойчивой, в то время как точка $x^{(2)}$ является полуустойчивой.

Рассмотрим теперь общий случай отображения (4). Это отображение не имеет неподвижных точек, кроме уже исследованных $O_1 \equiv \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = (0,0)$ и $O_2 \equiv \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = (1/2, 1/2)$. Найдем диапазон параметрических значений, в котором эти точки устойчивы. Вследствие равенства $\mathrm{D}F(O_1) = 0$ устойчивость точки O_1 не может быть определена из анализа по первому приближению. Поэтому разложим функции f и g вблизи нее:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_{x_1}(O_1)\Delta x_1 + f_{x_2}(O_1)\Delta x_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(f_{x_1x_2}(O_1) + 2f_{x_1x_2}(O_1) + f_{x_2x_2}(O_1)\Big),\\ \Delta g &= g_{x_1}(O_1)\Delta x_1 + g_{x_2}(O_1)\Delta x_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(g_{x_1x_2}(O_1) + 2g_{x_1x_2}(O_1) + g_{x_2x_2}(O_1)\Big),\end{aligned}$$

где $\Delta x_1 = x_1 - 0$, $\Delta x_2 = x_2 - 0$. Таким образом,

$$\Delta f = a\Delta x_1 \Delta x_2, \quad \Delta g = a\Delta x_1 \Delta x_2.$$

В окрестности O_1 отображение (4) примет вид

$$x_1 \longmapsto a x_1 x_2, \quad x_2 \longmapsto a x_1 x_2. \tag{7}$$

Следовательно, для анализа устойчивости точки O_1 отображения (4) достаточно изучить действие отображения (7) в некоторой малой ее окрестности, т. е. рассмотреть величину

$$R = \rho_1 - \rho_2 = x_1^2 + x_2^2 - ({x_1'}^2 + {x_2'}^2) = x_1^2 + x_2^2 - 2a x_1^2 x_2^2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — расстояния до точки O_1 до и после одной итерации соответственно. Из полученного соотношения можно найти, что если $x_1^2 < 1/a^2$, $x_2^2 < 1/a^2$, то $R > 0$. Это означает, что при выполнении этих неравенств имеет место локальное сжатие: точка O_1 является локально устойчивой при всех $0 < a \leqslant 4$.

Исследуем теперь поведение отображения (4) вблизи точки $O_2 = (1/2, 1/2)$ при $a = 4$. Тогда отображение (4) можно записать как

$$x_1 \longmapsto 4x_2 x_1(1 - x_1), \quad x_2 \longmapsto 4x_1 x_2(1 - x_2). \tag{4$'$}$$

Разлагая правую часть вблизи O_2 до квадратичных членов, получим

$$\Delta x_1 \longmapsto \Delta x_2 - 2\Delta x_1^2, \quad \Delta x_2 \longmapsto \Delta x_1 - 2\Delta x_2^2, \tag{8}$$

где $\Delta x_1 = x_1 - 1/2$, $\Delta x_2 = x_2 - 1/2$. Для анализа полученного отображения (8) перейдем к более удобным переменным

$$y_1 = \Delta x_2 + \Delta x_1, \quad y_2 = \Delta x_2 - \Delta x_1.$$

Легко видеть, что переменная y_1 пропорциональна отклонению от точки O_2 по диагонали $x_1 = x_2$, а переменная y_2 — в ортогональном ей направлении, т. е. отклонению вдоль перпендикулярного диагонали направления. Тогда точка $O_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = (1/2, 1/2)$ в новых переменных будет иметь координаты $O_2 = (y_1, y_2) = (0, 0)$, а отображение (8) перепишется как

$$G: \begin{cases} y_1 \longmapsto y_1 - (y_1^2 + y_2^2), \\ y_2 \longmapsto -y_2(2y_1 + 1). \end{cases} \tag{8$'$}$$

Для выяснения характера поведения этого отображения вблизи O_2 запишем его вторую итерацию, G^2, оставляя только члены не выше второго порядка:

$$G^2: \begin{cases} y_1 \longmapsto y_1 - (y_1^2 + y_2^2), \\ y_2 \longmapsto y_2(1 + 4y_1). \end{cases} \tag{8$''$}$$

Из анализа этого соотношения следует, что как при $y_2 > 0$, так и при $y_2 < 0$ от итерации к итерации изображающая точка отображения (8″) удаляется от точки O_2. Точка O_2 является притягивающей лишь на инвариантной диагонали $x_1 = x_2$, если $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) > (1/2, 1/2)$.

Таким образом, почти все точки квадрата $[0,1] \times [0,1]$ притягиваются неподвижной точкой O_1. Следовательно, два параметрически сцепленных отображения проявляют *глобальную* синхронизацию, т. е. почти все траектории стремятся к тривиальному равновесному состоянию $x_1 = x_2 = 0$.

Допустим теперь, что цепочка имеет произвольную длину $N > 2$. В этом случае исследование синхронизации $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$ полностью идентично картине при $N = 2$. Кроме того, нетрудно показать, что отображение (3) не имеет других неподвижных точек, кроме $O_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ при $0 < a \leqslant 4$ и $O_2 = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$ при $a = 4$. Анализ устойчивости этих точек, который проводится совершенно аналогично предыдущему, показывает, что, как и в двумерном случае $N = 2$, почти все итерации отображения сходятся к точке O_1.

2. Другие виды линейной связи. Аналитически удается рассмотреть более сложный вид параметрической связи. Например, когда каждый элемент цепочки взаимодействует с *двумя* своими ближайшими соседями. В этом случае исследование распадается на два варианта. Первый вариант не учитывает значения собственно элемента цепочки:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (x_N + x_2) a x_1 (1 - x_1), \\ x_2 &\longmapsto (x_1 + x_3) a x_2 (1 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N &\longmapsto (x_{N-1} + x_1) a x_N (1 - x_N). \end{aligned} \tag{3$'$}$$

Второй вариант это значение учитывает:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (x_N + x_1 + x_2) a x_1 (1 - x_1), \\ x_2 &\longmapsto (x_1 + x_2 + x_3) a x_2 (1 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N &\longmapsto (x_{N-1} + x_N + x_1) a x_N (1 - x_N). \end{aligned} \tag{3$''$}$$

Аналитическое исследование этих вариантов показывает, что они принципиально не отличаются от рассмотренного выше случая. Системы ($3'$) и ($3''$) также имеют только две неподвижные точки: $O_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = (0, 0, \ldots, 0)$ и $O_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$, причем лишь точка O_2 является устойчивой и притягивает почти все траектории из куба $[0,1]^N$.

Заключение

В последнее время подход к решению одной из старых проблем — описанию явления самоорганизации, т. е. образования и развития сложных упорядоченных структур, — в рамках теории детерминированного хаоса получил новое развитие. Известно, что достаточно сложные системы способны к самоорганизации. Необходимая предпосылка эффектов самоорганизации заключается в наличии потока энергии, поступающего в систему от внешнего источника и диссипируемого ею. Благодаря этому потоку система приобретает способность к автономному образованию структур. Очевидно, что эффекты самоорганизации не могут быть исключительным свойством сложных объектов и должны наблюдаться и в более простых системах.

Большой интерес представляют распределенные среды, которые построены из дискретных элементов, локально взаимодействующих друг с другом и, таким образом, приближенно описывающих естественные пространственно протяженные системы. По-видимому, даже когда отдельные элементы системы обладают сложной структурой, вся их внутренняя сложность не проявляется во взаимодействиях между ними и, с точки зрения макросистемы, они функционируют как достаточно простые объекты с малым числом эффективных степеней свободы. Поэтому описание при помощи сетей сцепленных подсистем является вполне оправданным подходом. В данной работе на достаточно строгом уровне показано, что цепочка, составленная из параметрически взаимодействующих одномерных отображений, способных проявлять как регулярную, так и хаотическую динамику, самопроизвольно синхронизуется. Иными словами, она переходит в состояние, когда все элементы функционируют идентичным образом. Следовательно, если исходная среда может быть аппроксимирована подобной одномерной сетью сцепленных нелинейных подсистем, то такая среда будет эволюционировать к состоянию полной синхронизации.

Литература

1. Chaos. 1992. **2**, No. 3: Coupled map lattices.
2. *Muñuzuri A.P., Perez-Muñuzuri V., Gomez-Gesteira M.* et al. // Int. J. Bif. and Chaos. 1995. **5**, No. 1. P. 17.
3. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький, 1989.
4. *Kaneko K.* // Physica D. 1989. **34**, No. 1–2. P. 1.
5. *Kaneko K.* // Ibid. 1990. **41**, No. 2. P. 137.
6. *Bunimovich L.A.* // Ibid. 1995. **86**. P. 248.
7. *Druzhinin O.A., Mikhailov A.S.* // Phys. Lett. 1990. **A148**, No. 8–9. P. 429.
8. Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems. / Ed. P. Manneville, N. Boccara, G.Y. Vichniac, R. Bidaux. // Proc. in Phys. Springer, Berlin. 1989. V. 46.
9. *Druzhinin O.A., Mikhailov A.S.* Preprint No. 1626 Ин-та космич. исследований. М., 1989.
10. *Loskutov A. Yu., Thomas G.E.* // SPIE Proc. 1993. **2037**. P. 238.
11. *Loskutov A.Yu., Tereshko V.M., Vasiliev K.A.* // Int. J. Neural Systems. 1995. **6**. P. 175.
12. *Loskutov A.Yu.*// Abstr. Intern. Conf. «Criteria of Self-Organization in Physical, Chemical, and Biological Systems». M., 1995. P. 144.
13. *de Melo W., van Strien S.* One-Dimensional Dynamics. Springer, Berlin, 1993.
14. *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Birkhauser, Boston, 1980.

Поступила в редакцию
25.02.98