возрастает и может в несколько раз превысить стационарный уровень. Чем выше быстродействие модулятора, тем сильнее проявляется этот эффект. Такая особенность частотной характеристики обусловлена нарушением симметрии АО-связи между нулевым и первым порядками дифракции в нестационарном акустическом поле.

Литература

1. *Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е.* Физические основы акустооптики. М., 1985.
2. *Gordon E.I.* // Appl. Opt. 1966. **5**, No. 10. P. 1629.
3. *Maydan D.* // IEEE J. Quant. Electron. 1970. **QE-6**, No. 1. P. 15.
4. *Johnson R.V.* // Appl. Opt. 1977. **16**, No. 2. P. 507.
5. *Балакший В.И., Парыгин В.Н.* // Радиотехн. и электроника. 1980. **25**, № 9. С. 1957.
6. *Балакший В.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1982. № 1. С. 43 (Moscow University Phys. Bull. 1982. No. 1. P. 46).
7. *Балакший В.И.* // Изв. АН СССР, сер. физ. 1981. **45**, № 3. С. 636.
8. *Балакший В.И.* // Радиотехн. и электроника. 1984. **29**, № 8. С. 1610.
9. *Магдич Л.Н., Молчанов В.Я.* // ЖТФ. 1977. **47**, № 5. С. 1068.

Поступила в редакцию
19.12.97

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.511.32:536.758

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА

В. П. Юшков

(*кафедра физики атмосферы*)

Для описания климатического состояния предлагается ввести в систему уравнений, описывающих климатическую изменчивость, понятие вероятности. Проведен критический анализ используемых методов климатического моделирования и показана необходимость перехода от динамического к динамико-статистическому описанию. Для определения сохраняющихся характеристик движения введена бесконечная цепочка масштабов. Формулируется тезис о том, что для выделения из всех возможных движений внутри системы тех, для которых выполняются законы сохранения, необходимо определить характеристики возможных распределений вероятности в форме операторов.

Введение

Исследования глобального климата Земли опираются на представление о весьма широком спектре изменчивости как в пространстве, так и во времени практически всех геофизических процессов: атмосферных, океанических, литосферных, криосферных, космических. Сложность численного моделирования сразу многих процессов разных масштабов и весьма неудовлетворительные результаты таких попыток подводят к мысли о бесперспективности чисто детерминированного подхода к исследованию климата. Если полагать цепочку временных и пространственных масштабов взаимодействующих процессов бесконечной, то нужно заранее отказаться от стремления включить все геофизические процессы в описание климата. Более пристальное внимание следует уделить взаимосвязи процессов соседних масштабов. Обычно, когда говорят о цепочке масштабов, подразумевают (может быть, неявно), что описание ведется на таком масштабе, для которого меньший масштаб является бесконечно малым или больший — бесконечно большим. В то же время постепенное изменение временного или пространственного масштаба исследуемых процессов приводит к необходимости пересмотра предельных условий, заложенных в выбранное описание в тех случаях, когда эти условия перестают выполняться.

Хорошо известное определение климата как статистического ансамбля состояний [1] выдвигает на передний план вероятностный подход к анализу климатических процессов, тогда как наиболее сложные модели климата — модели общей циркуляции атмосферы и океана — являются, по существу, динамическими. По замыслу автора, объединить эти два подхода можно. Для этого надо снова рассмотреть основные, казалось бы очевидные, положения климатического моделирования и проанализировать недостатки используемых в настоящее время подходов.

В предыдущей работе [2] был предложен путь в рамках возврата к кинетическим уравнениям, в настоящей статье продолжен поиск подходящего статистического описания климатической системы.

Постановка проблемы

Климатическая система — яркий и очень важный пример существенно неравновесной и структурированной среды. Нерегулярная изменчивость этой системы является ее неотъемлемым свойством, а не следствием неполного учета динамических процессов.

То, что гидродинамический подход к описанию климатического состояния неприемлем, интуитивно понятно многим. Серьезная критика динамических моделей климата представлена, например, в [3]. Климатическая система быстро «забывает» свои начальные «погодные» условия. Сравнение наблюдаемого распределения климатических характеристик и результатов «динамического» моделирования показывает, что ошибки моделирования выходят далеко за рамки естественной изменчивости.

В свою очередь, классический статистический подход хотя и способен детально описать проводимые наблюдения, не может объяснить структуры общей циркуляции атмосферы и океана. Циркуляцию можно было бы описать с помощью эмпирических собственных функций, как предлагал А. М. Обухов [4], но пока нет правил выбора ни оптимальных собственных функций, ни весовых коэффициентов климатически «равновесного» распределения.

Невозможно и формально ввести вероятностное пространство в трехмерные модели климата. Это многократно увеличивает размерность задачи, делая ее необозримой. По существу, это будет возврат от уравнений гидродинамики к кинетическим уравнениям.

Со времен Больцмана кинетический метод достиг высокого уровня сложности и сейчас подошел к проблеме необратимости времени [5]. Эта необратимость не следует из исходных динамических уравнений. Уравнения для классической одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ оставались бы детерминированными, если бы не интеграл столкновений [6]

$$I=\int \frac{d\Phi(\mathbf{r}_{12})}{d\mathbf{r}_{12}}\,\frac{\partial f_2(\mathbf{r}_{12},\mathbf{p}_{12})}{\partial \mathbf{p}_{12}}\,d\mathbf{p}_{12}\,d\mathbf{r}_{12},$$

в который через двухчастичную функцию распределения входит взаимодействие частиц на микромасштабах.

Таким образом, в уравнении Больцмана соединяются процессы разных масштабов: макроскопического, на котором описывается поведение функции распределения $f_1(\mathbf{r},\mathbf{p})$, и микроскопического — внутри «физически бесконечно малого масштаба» — через $f_2(\mathbf{r}_{12},\mathbf{p}_{12})$.

Выбор масштаба описания разделяет кинетическое уравнение на две независимые части. Эти уравнения будут разными и по форме: интегральными на микроскопических и дифференциальными на макроскопических масштабах. Развитие кинетического подхода следует искать именно в универсальных соотношениях между правой и левой частями кинетического уравнения.

Цепочка масштабов

Цель нашего подхода — введение вероятности, но чтобы вероятность могла быть измерена, в системе должны выполняться законы сохранения. Выполнение этих законов возможно только на определенном пространственно-временном масштабе, который фиксируется в постановке задачи. В рамках этой задачи рассматриваемая система изолирована и характеризуется энергией системы — гамильтонианом.

В основе классического термодинамического подхода лежит гипотеза о сохранении полного гамильтониана H макро- и микросистем:

$$H=H_1+H_2.$$

В этом соотношении сохраняется динамическая основа кинетических уравнений. Если же представить себе бесконечную цепочку масштабов, то в такой цепочке и сумма двух гамильтонианов не описывает замкнутую систему. Эту цепочку символически можно представить в следующем виде:

$$\leftrightarrow\ V_{-2}+H_{-1}+V_{-1}\ \leftrightarrow\ V_{-1}+H+V\ \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\ V+H_1+V_1\ \leftrightarrow\ V_1+H_2+V_2\ \leftrightarrow\ \text{и т. д.},$$

где H_{i+1} — гамильтониан меньшей, а H_{i-1} — большей по масштабу системы, V_i описывает взаимодействие макросистем разного масштаба. Специфические свойства этого взаимодействия и нарушают детерминированное описание. Под масштабом, конечно, следует подразумевать не только линейный размер, но и собственный временной параметр.

Любая система замкнута только на определенном пространственно-временном масштабе, и на меньшем масштабе сохранение энергии возможно только «в среднем»:

$$\frac{1}{T^*}\int_0^{T^*} H\,d\tau=E \quad \text{и} \quad \frac{1}{T^*}\int_0^{T^*} V\,d\tau=0,$$

где T^* — некоторый характерный масштаб времени. Эти условия для реальной системы выполняются всегда приближенно: пока макросистема большего масштаба еще не успела прореагировать, а меньшего — уже пришла к состоянию равновесия.

Особенность описания взаимодействия процессов разных масштабов заключается в том, что V не может быть привычной гладкой функцией времени на макромасштабах, так как хотя масштаб T^* является «бесконечно малым» для выбранного уровня описания и

$$\frac{1}{T^*}\int_t^{t+T^*} V(\tau)\,d\tau=V(\tau^*)=0,$$

где $\tau^*\in[t,\,t+T^*]$, но t^* не связано с определенным моментом времени t, потому что $V(\tau)\not\equiv 0$.

Другими словами, для разных масштабов нужно ввести две временные переменные: τ — для внутреннего времени, по которому проводится интегрирование, и t — для момента времени, к которому относится значение этого интеграла.

Как известно, существует еще одна сохраняющаяся характеристика системы — действие S, вариация которого равна нулю для реальных движений. Именно действие можно связать с движением на микромасштабах:

$$S=\int_t^{t+T^*} L_1\,d\tau,$$

где L — функция Лагранжа.

На выбранном уровне описания нам не нужно знать конкретный вид H_1 или L_1, достаточно лишь предположить, что для широкого диапазона времен (и расстояний) действие в предлагаемой форме существует и постоянно.

В этом случае можно считать, что

$$\frac{1}{T^*}\int\limits_t^{t+T^*} H\,d\tau = E = \varkappa\frac{1}{T^*}\int\limits_t^{t+T^*} H_1\,d\tau,$$

где E — средняя энергия рассматриваемого масштаба, а масштабный множитель $\varkappa$ связывает характерные параметры макро- и микросистем.

Такие же рассуждения можно отнести и к пространственным переменным, а все интегралы от функций распределения рассматривать по пространственно-временному множеству $\Omega_\tau = \{T^*, L^*\}$. Вектор внутренних пространственных координат ξ по той же причине следует отличать от вектора центра масс частицы $\mathbf{r}$.

Таким образом, для введения вероятностного описания необходимы два условия. Во-первых, замкнутость системы на выбранном уровне описания. Это гарантирует выполнение законов сохранения, прежде всего количества вещества (в форме нормировки вероятности) и внутренней энергии в макросистеме. Во-вторых, если поведение макросистемы стохастично, то прогнозировать можно только характеристики ансамбля одинаковых элементов, которые и составляют макросистему с определенными макроскопическими характеристиками.

Разделение цепочки масштабов возможно из-за существенного различия пространственно-временных характеристик $\{T^*, L^*\}$ разных типов взаимодействия. В существовании таких различий нас убеждают резкие фазовые границы в окружающем мире.

Заметим, что модель столкновений Больцмана и сама структура функции распределения могут быть дополнены, исходя из представления о взаимосвязи масштабов. Столкновения молекул не могут описываться сохраняющимся гамильтонианом, потому что в процессе взаимодействия часть энергии, которой описывается внутреннее движение в макросистеме (кинетическая и потенциальная энергия частиц), переходит в энергию движения внутри микрочастиц. Это значит, что функция распределения таких частиц должна зависеть от взаимодействия и, возможно, параметр V можно было бы внести в ряд аргументов одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}, V)$, приводя ее, таким образом, в соответствие с размерностью пространства-времени.

Действие в термодинамике и квантовой механике

Хорошо известно, что функцию распределения замкнутой макросистемы по энергиям можно представить в виде δ-функции. Для N-частичной системы в фазовом пространстве координат и импульсов $\{X_N\}$ это микроканоническое распределение Гиббса [6]:

$$f_N(X_N, E) = \frac{1}{C}\delta(E - H(X_N)),$$

где H — гамильтониан системы, а E — ее энергия, δ — дельта-функция, C — нормировочный множитель. Как видим, такое представление полной энергии системы не включает внутреннюю энергию самих частиц. Поскольку это функция распределения изолированной системы, она не изменяется со временем и ее можно представить через интеграл Фурье от переменной с размерностью времени:

$$\delta(E - H) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-i\frac{E - H}{\hbar}\tau\Big\}d\tau.$$

Бесконечные пределы появляются здесь именно потому, что такая модель изолированной системы не имеет характерного временного масштаба. Если же аппроксимировать обобщенную δ-функцию гладкой функцией, то в определение этой функции войдет постоянная с размерностью действия, и границы интегрирования можно будет считать конечными. Эта постоянная и временной масштаб явно присутствуют в нормировке δ-функции. Постоянная с размерностью действия намеренно записана в виде постоянной Планка, чтобы подчеркнуть тесную связь динамического и вероятностного подходов через операторный формализм квантовой механики. Но эта постоянная с размерностью действия, так же как и энергия, характеризует определенный уровень описания, и ее значение зависит от места в бесконечной цепочке масштабов.

Если вернуться к хорошо известной работе Шрёдингера [7], то можно видеть, что при выводе своего уравнения он не использовал какой-либо гипотезы о физической малости микрочастиц. Значение $\hbar$ определялось исходя из совпадения с результатами наблюдения излучения атомов. Решалась обычная для динамики вариационная задача и Шрёдингеру понадобилась лишь подстановка $S = \varkappa \ln\psi$, связывающая действие и волновую функцию. Подстановка Шрёдингера не предполагала вероятностного смысла, но условия, которые он наложил на функцию ψ, можно считать определением вероятности нахождения одной частицы из ансамбля подобных. Тем более что сам Шрёдингер отмечает, что для вывода его уравнения можно воспользоваться и законом сохранения $S = \int H\,d\xi$ при нормирующем условии $\int \psi^2 d\xi = 1$. Таким образом, именно условие нормировки вероятности вместе с принципом наименьшего действия (в термодинамике — максимума энтропии) приводит к уравнению Шрёдингера, которое является не заменой уравнений динамики, а их дополнением на других масштабах.

Взаимосвязь классической функции распределения f и квантовой матрицы плотности ρ дается хорошо известным представлением Вигнера:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \exp\Big\{-i\frac{\mathbf{p}\xi}{\hbar}\Big\}\rho(\mathbf{r}, \xi)\,d\xi,$$

также записанным в виде фурье-преобразования. Анализ связи классической и квантовой функции распределения, проведенный в работе [8], показывает, что это представление справедливо для любых замкнутых макросистем с перемешиванием. Таким образом, между квантовым и классическим представлениями нет противоположности, а существует дополнительность.

Но все же главное удобство аппарата квантовой механики не в формальной замене переменных. Введя вероятностное пространство и функцию распределения Φ на выбранном пространственно-временном множестве Ω_τ, можно увидеть, что Φ — единственная не случайная функция внутренних переменных. Физические же или измеряемые характеристики (плотность, энергия, импульс, момент) не случайны только в среднем по всему пространственно-временному множеству, на котором определена функция распределения Φ.

Если представить эти характеристики, например энергию, в виде интеграла Лебега–Стильтьеса:

$$E = \int\limits_{\Omega_\tau} H(\xi, \tau)\, d\Phi,$$

как предлагал еще А. М. Обухов [4], то $H(\xi, \tau)$ оказывается зависящей от вида распределения $\Phi(\xi, \tau)$. В теории турбулентности этот факт прослеживается в зависимости всех вводимых коэффициентов от структуры турбулентности, т. е. от вида Φ, а это нам заранее неизвестно, известны лишь законы сохранения. Значит, нужно выразить характеристики макросистемы с помощью операторов, действующих на возможное распределение вероятности. Именно это и делает квантовая механика. Вид этих операторов должен соответствовать динамическому представлению при предельном переходе.

Заключение

Таким образом, операторные вероятностные уравнения для любого масштаба описания не могут не быть подобны уравнению Шрёдингера, которое выражает законы сохранения, действующие в замкнутой макросистеме. Такое описание не заменяет, а дополняет динамическое, а методы и приемы вероятностного описания, по-видимому, универсальны для любых масштабов и поэтому могут быть использованы в климатических исследованиях.

Литература

1. *Монин А.С.* Введение в теорию климата. Л., 1982.
2. *Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 57).
3. *Dobrovolskii S.G.* Global Climatic Changes in Water and Heat Transfer-Accumulation Processes. Amsterdam, 1992.
4. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л, 1985.
5. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М., 1985.
6. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М., 1985.
7. *Шрёдингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М., 1976.
8. *Kolovsky A.R.* // Europhys. Lett. 1994. **27**, No. 2. P. 79.

Поступила в редакцию
21.05.97

УДК 550.3

УЧЕТ ТЕНЗОРА ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ЯДРА ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(*ГАИШ*)

Для гармонических колебаний твердого ядра Земли в произвольном направлении был вычислен тензор присоединенных масс. Учет тензора присоединенных масс приводит к увеличению периодов свободных колебаний внутреннего ядра Земли примерно на 1 час. При некоторых значениях плотности ядра периоды колебаний близки к экспериментальным периодам, полученным Д. Е. Смайли. Расщепление экспериментальных частот хорошо интерпретируется как расщепление экваториальной моды свободных колебаний внутреннего ядра Земли в гравитационном поле несимметричной оболочки при наличии у последней соответствующего квадрупольного момента.

1. Постановка задачи

В работе [1] были исследованы свободные колебания внутреннего ядра Земли в произвольном направлении. Задача решалась в постановке Буссе–Шлихтера [2] с дополнительным учетом неравновесной части гравитационного поля Земли. Однако для окончательного решения задачи требовалось знание величины тензора присоединенных масс, который в численных оценках [1] был положен равным нулю. Необходимость учета тензора присоединенных масс обусловлена тем, что часть кинетической энергии ядра передается жидкости и поэтому для его вычисления необходимо решить соответствующие уравнения гидродинамики. Для полярных колебаний эта задача была решена Буссе в предположении симметрии движения жидкости относительно оси вращения [2]. Однако для колебаний в произвольном направлении расчетов проведено не было. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.