

где G_v — фермиевская константа, β_0 — отношение аксиального и векторного вкладов в $V-A$ варианте слабого взаимодействия.

Из формулы (28) может быть, например, оценена полевая нестабильность протона. Учитывая, что параметр $\chi = eE(2|I|)^{-3/2}m^{-2}$, получим

$$W_{\beta}^F = \frac{2G_v^2 m^5 (1 + 3\alpha_0^2)}{\pi^3 |I|^{5/2}} \left(\frac{eF}{8m^2}\right)^4 \times \exp\left(-\frac{2m^2(2|I|)^{3/2}}{3eF}\right), \quad (29)$$

где $|I| = 3, 52$.

Таким образом, время полевой нестабильности протона в электромагнитных полях $F > m^2/e$ может приближаться ко времени жизни свободного нейтрона.

Подчеркнем, что вблизи атомных ядер существуют сверхсильные электромагнитные поля. Так, например, на границе ядра урана ($R \sim 10^{-12}$ см) электрическое поле $F \approx 3 \cdot 10^{16}$ СГСЭ/см, что, вообще говоря, соответствует $F > m^2/e$. Из (29) следует, что подобное поле может приводить к эффективному β -превращению протонов, находящихся в пограничной зоне ядра и слабо удерживаемых ядерными силами. Таким образом, этот эффект может давать заметный вклад в явление β -нестабильности тяжелых ядер.

Отметим также, что эффект индуцированного распада протонов может иметь место и при воздействии

на ядра интенсивного потока фотонов. Обсуждение деталей планируемого эксперимента по наблюдению подобной β -ядерной активности при энергиях фотонов до порога выхода нуклонов из ядра содержится в работе [11].

Автор благодарен О. Ф. Дорофееву и В. Р. Халилову за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М., 1989.
2. Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М., 1982.
3. Ритус В.И. // Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 5; Никишиов А.И., Ритус В.И. // Там же. 1986. Т. 168. С. 232.
4. Лобанов А.Е., Халилов В.Р., Родионов В.Н. // Ядерная физика. 1980. 32. С. 174.
5. Лобанов А.Е., Муратов А.Р. // ЖЭТФ. 1984. 87. С. 1140.
6. Родионов В.Н. // ЖЭТФ. 1997. 111. С. 3.
7. Родионов В.Н. // ЖЭТФ. 1998. 113. С. 21.
8. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М., 1978.
9. Келдыш Л.В. // ЖЭТФ. 1958. 34. С. 1138.
10. Franz W.Z. // Naturforsch. 1958. 13A. P. 484.
11. Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Родионов В.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 31 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 6. P. 37).

Поступила в редакцию
02.02.98

УДК 539.171

О ЗАВИСИМОСТИ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

А. Р. Френкин

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Исследована зависимость особых решений обобщенного одномерного уравнения типа Шрёдингера от параметров задачи. Установлена связь слабых и обычных сепаратрисных решений. Рассмотрены уравнения с различными типами нелинейностей.

В работах [1–3] был предложен метод построения особых (нерасплывающихся) решений обобщенного одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + F(|\psi|)\psi,$$

отличного от обычно рассматриваемого кубического НУШ ($F(|\psi|) \sim |\psi|^2$). Этот метод позволяет получать нерасплывающиеся решения таких НУШ, для которых неизвестна обратная задача квантовой теории рассеяния [4].

Необходимость исследования обобщенного НУШ обусловлена появлением новых физических моделей,

содержащих потенциалы в виде полиномов выше четвертой степени, а также логарифмические множители. Такие потенциалы используются в физике твердого тела [5], в физике полимеров [6], в суперсимметричных моделях теории поля [7] и т. д.

Следуя работам [1–3], представим особые решения НУШ, соответствующие уединенным волнам (нерасплывающимся обобщенным волновым пакетам) в виде

$$\psi(x, t) = y(z) \exp\{i(pz + \delta t)\},$$

где $z = x - vt$ — фазовое время, $p = v/2$, v — скорость пакета, δ — действительное число, $y(z)$ — действительная функция фазового времени.

Для нахождения функций $y(z)$, определяющих особые решения НУШ, используем метод квадратур. Тогда задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$y_{zz} + E_0 y - F(|y|)y = 0,$$

которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = U(|y|, E_0) = -2 \int F(|y|)y dy + E_0 y^2.$$

Здесь основной параметр задачи $E_0 = (v/2)^2 - \delta$ определяется значениями скорости пакета v и частоты (числа рассогласования) δ .

Специально отметим, что при использовании метода квадратур особые решения НУШ в виде уединенных волн [1, 2] определяются двумя величинами: параметром задачи E_0 и значением постоянной интегрирования E , сходной с полной энергией в задачах классической механики.

Ограничимся далее рассмотрением наиболее интересных для физических приложений сепаратрисных решений типа солитона и кинка.

В работе [3] было показано, что асимптотическое поведение особого сепаратрисного решения НУШ при больших фазовых временах определяется значением второй производной соответствующего эффективного потенциала $U(y)$ в особых точках. Было рассмотрено степенное и логарифмическое поведение $U''(y)$ в этих точках (при $U'(y) = 0$). Однако в [3] специально выбирались потенциалы $U(y)$ с определенным значением параметра E_0 в каждом конкретном случае.

Рассмотрим теперь эффективные потенциалы $U(y) = U(|y|, E_0)$ с произвольным значением параметра задачи E_0 , причем при любом значении E_0 существует какое-то особое решение НУШ (солитонное, кинковое, слабосолитонное, колебательное и т.д.). При заданном значении параметра E_0 вид особого решения НУШ определяется только значением постоянной интегрирования (энергии) E . Подбором параметра задачи E_0 можно изменять поведение потенциала $U(y)$ в особых точках, например значение второй производной $U''(y)$ в этих точках, а также положение самих особых точек. Это дает возможность связать обычные сепаратрисные решения с экспоненциальным убыванием при больших фазовых временах со слабыми сепаратрисными решениями, приведенными в работе [3].

В качестве примера рассмотрим НУШ с комбинацией кубической и квадратичной нелинейностей:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2\beta |\psi|^2 \psi + \frac{3}{2} \alpha |\psi| \psi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Соответствующий эффективный потенциал

$$U(y) = \beta y^4 - \alpha |y|^3 + E_0 y^2 \tag{1}$$

при $E_0 \neq 0$ имеет нуль второго порядка в точке $y = 0$, что для $E_0 < 0$ и постоянной интегрирова-

ния $E = 0$ приводит к обычному, по классификации работы [3], солитонному решению НУШ:

$$\psi(x, t) = \frac{\pm 2|E_0| \exp\{i(px - \varepsilon t)\}}{\alpha \left\{ \sqrt{1 + \frac{4\beta|E_0|}{\alpha^2}} \operatorname{ch} \left((z - z_0) \sqrt{|E_0|} \right) - 1 \right\}},$$

где z_0 — действительная постоянная, $\varepsilon = p^2 + E_0$. При $E_0 = 0$ эффективный потенциал в точке $y = 0$ имеет нуль третьего порядка, в связи с чем предельный переход $E_0 \rightarrow 0$ переводит обычное солитонное решение НУШ в слабосолитонное:

$$\psi(x, t) = \pm \frac{\alpha}{\beta} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 (z - z_0)^2}{4\beta} \right\}^{-1} \exp\{i(px - p^2 t)\}.$$

Эффективный потенциал (1) и фазовые портреты сепаратрисных решений для $E_0 < 0$ (сплошные линии) и $E_0 = 0$ (пунктирные) изображены на рис. 1.

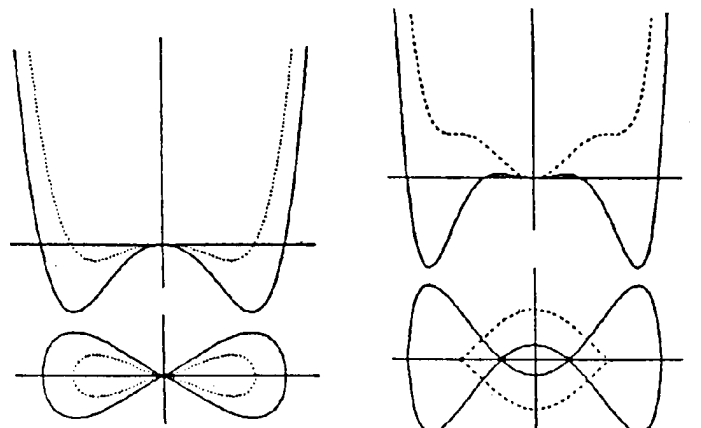


Рис. 1

Рис. 2

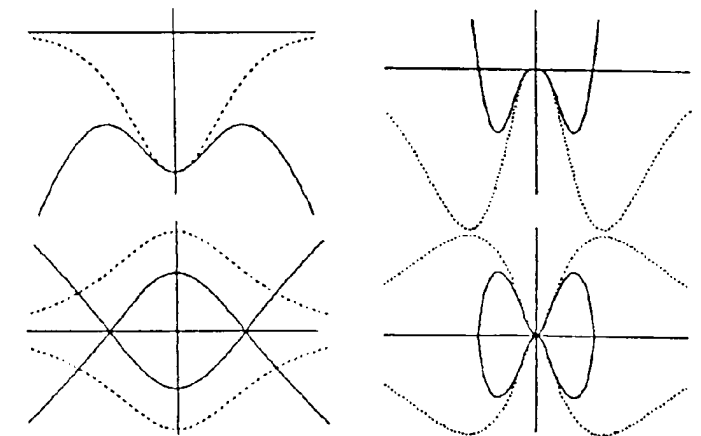


Рис. 3

Рис. 4

Из приведенного примера следует, что НУШ с комбинацией двух степенных нелинейностей могут иметь сепаратрисные солитонные решения как с экспоненциальным, так и со степенным убыванием при больших фазовых временах, что определяется лишь параметром задачи E_0 .

Подобным образом из обычных кинковых решений НУШ с экспоненциальным поведением при больших фазовых временах для определенного значения параметра задачи E_0 могут быть получены слабые кинковые решения со степенным убыванием при $|z - z_0| \rightarrow \infty$. С этой целью рассмотрим НУШ с комбинацией нелинейностей третьей и пятой степеней:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 3\beta |\psi|^4 \psi + 2\alpha |\psi|^2 \psi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = \beta y^6 - \alpha |y|^4 + E_0 y^2. \quad (2)$$

Обычное сепаратрисное ($E = \gamma^2 \alpha^2$) кинковое решение НУШ, которое может быть получено методом квадратур при $0 < 3\beta E_0 / \alpha^2 < 1$, имеет вид

$$\psi(x, t) = \frac{a \operatorname{th}(\gamma(z - z_0)) \exp\{i(px - \varepsilon t)\}}{\sqrt{1 + b \operatorname{th}^2(\gamma(z - z_0))}},$$

где

$$a = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left[\left(1 - \frac{3\beta E_0}{\alpha^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + 2 \left(1 - \frac{3\beta E_0}{\alpha^2}\right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2},$$

$$\gamma = \sqrt{E_0} \left[\left(1 - \frac{3\beta E_0}{\alpha^2}\right)^{-1/2} + 1 \right]^{-1/2},$$

$$b = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{3\beta E_0}{\alpha^2}\right)^{-1/2} - 1 \right].$$

Предельным переходом $E_0 \rightarrow \alpha^2 / (3\beta)$ это решение переводится в слабое кинковое решение

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{27\beta^2}} \frac{(z - z_0) \exp\{i(px - \varepsilon t)\}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{9\beta}(z - z_0)^2}},$$

а эффективный потенциал (2) переходит в $U(y) = \beta [y^2 - \alpha / (3\beta)]^3 + \alpha^3 / (27\beta^2)$. Это видно из рис. 2, где приведены эффективные потенциалы и фазовые портреты сепаратрисных кинковых решений для $0 < E_0 < \alpha^2 / (3\beta)$ (обычный кинк, сплошные линии) и $E_0 = \alpha^2 / (3\beta)$ (слабый кинк, штриховые линии).

Рассмотрим далее обобщенные НУШ с нелинейностями $F = F(|\psi|)$, экспоненциально убывающими при $|\psi| \rightarrow \infty$, что при значении $E_0 = 0$ допускает существование особых нефизических сепаратрисных решений НУШ со слабым (логарифмическим) возрастанием $|\psi(x, t)|$ при больших фазовых временах. Однако при параметре задачи $E_0 > 0$ такие НУШ имеют лишь ограниченные особые решения.

Возьмем, например, НУШ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \beta \frac{a \operatorname{th}(|\psi|/a)}{|\psi| \operatorname{ch}^2(|\psi|/a)} \psi, \quad a > 0, \quad \beta > 0,$$

которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = -\frac{\beta a^2}{\operatorname{ch}^2(y/a)} + E_0 y^2. \quad (3)$$

При параметре задачи $E_0 < 0$ это НУШ имеет сепаратрисное ($E = U_{\max}$) решение в виде обычного кинка. Потенциал (3) и фазовый портрет этого решения изображены на рис. 3 сплошными линиями.

Однако при параметре задачи $E_0 = 0$ методом квадратур может быть получено нефизическое сепаратрисное ($E = 0$) решение в виде кинка с логарифмическим возрастанием $|\psi|$ при больших фазовых временах:

$$\psi(x, t) = a \cdot \operatorname{arsh} \left((z - z_0) \sqrt{\beta} \right) \exp\{i(px - p^2 t)\}.$$

Потенциал (3) при $E_0 = 0$ и фазовый портрет этого решения изображены на рис. 3 штриховыми линиями.

При $E_0 > 0$ и любом значении постоянной интегрирования $E > -\beta a^2$ существуют только колебательные особые решения НУШ.

Рассмотрим далее НУШ вида

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\beta}{2} |\psi|^{\alpha-2} (\gamma |\psi| - \alpha) \exp\{-\gamma |\psi|\} \psi, \\ \alpha \geq 2, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0,$$

которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = -\beta |y|^\alpha \exp\{-\gamma |y|\} + E_0 y^2. \quad (4)$$

При $\alpha = 2$, $E_0 = 0$, $U'(0) = 0$, $U''(0) = -2\beta < 0$. Особая точка $y = 0$ не достигается за конечное фазовое время, как и точка $y = \infty$. Поэтому соответствующее сепаратрисное ($E = 0$) решение НУШ является солитонным с обычным поведением при $|y| \rightarrow 0$ ($y_z \sim |y|$) и логарифмическим возрастанием $|y|$ при больших фазовых временах, в связи с чем оно не является физическим.

При $\alpha = 3$, $E_0 = 0$ НУШ имеет сепаратрисное ($E = 0$) решение в виде нефизического слабого солитона с логарифмическим поведением при больших фазовых временах. Потенциал и фазовый портрет этого решения изображены на рис. 4 пунктиром.

При $\alpha = 3$, $E_0 > 0$ и $E = 0$ НУШ имеет обычное ограниченное слабосолитонное решение, причем $y_z \sim |y|^{3/2}$ при $|y| \rightarrow 0$. Потенциал и фазовый портрет этого решения изображены на рис. 4 сплошными линиями.

Специально отметим, что обобщенные НУШ могут быть использованы при исследовании различных нелинейных эффектов. Как известно, экспериментальные кривые в нелинейных задачах обычно

аппроксимируют комбинацией элементарных функций. Из них наиболее предпочтительными являются гиперболические функции, имеющие простое поведение на бесконечности. Например, локализованные волновые пакеты (солитоны) описываются функциями обратных степеней гиперболического косинуса, кинки принято описывать функциями гиперболического тангенса. Выбор модельных нелинейных уравнений, отличных от традиционного кубического НУШ, как правило, затрудняет это описание из-за отсутствия простых аналитических выражений для их решений. Однако, как показано в данной работе, некоторые обобщенные НУШ могут иметь частные решения довольно простого вида. Именно такие уравнения следует рассматривать как простые модели описания физических задач.

Например, если в эксперименте, который предположительно описывается кубическим НУШ, расплывающиеся волновые пакеты имеют неэкспоненциальное поведение на бесконечности, это может означать, что традиционное описание не подходит и кубическое НУШ следует подправить, введя в него дополнительно нелинейности других степеней $|\psi|$, или использовать другой вид нелинейности.

В некоторых случаях, когда восстановленное по экспериментальным данным особое решение мало отличается от известного кинкового или солитонного решения, можно довольно просто определить поправки к кубическому НУШ. Например, если кинкоподобное решение нелинейной задачи имеет вид

$$y = a \operatorname{th}(\gamma(z - z_0)) + \varepsilon a \operatorname{th}^3(\gamma(z - z_0)), \quad \varepsilon \ll 1,$$

это может означать, что кубическое НУШ следует заменить на рассмотренное ранее обобщенное НУШ

с комбинацией нелинейностей третьей и пятой степеней, где коэффициенты α , β и параметр задачи E_0 выражаются приближенными формулами

$$\alpha = (1 - 8\varepsilon) \frac{\gamma^2}{a^2}, \quad \beta = -2\varepsilon(1 - 4\varepsilon) \frac{\gamma^2}{a^4}, \quad E_0 = 2(1 - 3\varepsilon)\gamma^2.$$

Заметим, что аналогичная кубическая поправка к кинковому решению была получена при исследовании распространения волн в анизотропных средах [8].

Автор благодарен покойному А. С. Вшивцеву за полезное обсуждение.

Литература

1. Корниенко А.Г., Тернов И.М., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 1).
2. Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Там же. 1997. № 5. С. 10 (Ibid. 1997. No. 5. P. 12).
3. Баринаева Е.Г., Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Там же. 1998. № 1. С. 12 (Ibid. 1998. No. 1. P. 14).
4. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
5. Морозов А.И., Сигов А.С. // УФН. 1994. 164, № 3. С. 243.
6. Жак П. де. Идеи скейлинга в физике полимеров. М., 1982.
7. Кетов С.В. Нелинейные сигма-модели в квантовой теории поля и теории струн. Новосибирск, 1992.
8. Вшивцев А.С., Перегудов Д.В., Татаринцев А.В. // Физика Земли. 1995. № 11. С. 62.

Поступила в редакцию
11.02.98

УДК 514.7, 530.182

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Бадьян

(кафедра математики)

Рассматриваются поверхности с постоянной отрицательной внешней кривизной и отрицательной, отделенной от нуля внутренней кривизной в трехмерных римановых пространствах. Доказывается аналог теоремы Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. Обсуждается вопрос о существенности условий доказанной теоремы. Предложен алгоритм построения контрпримера в случае, когда одно из условий нарушено.

В настоящей работе доказывается для римановых пространств аналог теоремы Гильберта [1] о поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Обобщение теоремы Гильберта в этом направлении рассматривалось в статье [2]. Данная работа обобщает результат статьи [2].

Всюду далее считается, что греческие индексы пробегают значения 1, 2; латинские — 1, 2, 3. Принято соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся тензорным индексам.

Пусть $M \in C^5$ — многообразие без края, $\dim(M) = 2$, $G \in C^2(M)$ — собственно риманова

метрика, K_i — ее гауссова кривизна, $R_{\alpha\beta,\gamma\mu}^*$ — тензор кривизны пространства (M, G) .

Пусть $V \in C^5$ — многообразие без края, $\dim(V) = 3$, $g \in C^2(V)$ — собственно риманова метрика, $R_{ij,kl}$ — тензор кривизны пространства (V, g) .

Пусть $\varphi : M \rightarrow V$, $\varphi \in C^5(M)$ — изометрическое погружение. Зафиксируем $u_0 \in M$. Можно указать такую координатную окрестность Ω точки u_0 и такую координатную окрестность $\tilde{\Omega}$ точки $\varphi(u_0)$, что $\varphi(\Omega) \subseteq \tilde{\Omega}$. Координаты в $\tilde{\Omega}$ обозначим z^k ($k = \overline{1, 3}$),