КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

# ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИИ НЕАБЕЛЕВОГО КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1

**В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков**

(*кафедра теоретической физики*)

**Получены точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (в классической неабелевой теории поля) с черн-саймоновской топологической массой в $2+1$-мерном пространстве-времени. Вычислены однопетлевые вклады бозонных и фермионных флуктуаций в энергию калибровочного поля. Показано, что квантовые флуктуации понижают энергию вакуума калибровочного поля.**

В нечетномерных калибровочных теориях имеется возможность ввести в лагранжиан калибровочного поля слагаемое, отвечающее за генерацию массы этого поля, так называемый черн-саймоновский топологический член [1, 2].

Для двумерной $SU(2)$-глюодинамики потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A^a_\mu/2$, где $a=1,2,3$, $\tau^a$ — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом [1]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} - \frac{\theta}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left(F^a_{\mu\nu}A^a_\alpha - \frac{g}{3}\varepsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\alpha\right), \tag{1}$$

где напряженность $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$. Коэффициент $\theta$ перед последним слагаемым играет роль массы калибровочного поля. Уравнение Янга–Миллса принимает вид

$$D^{ac}_\mu F^{a\,\mu\beta} - \frac{\theta}{2}\varepsilon^{\beta\mu\nu}F^c_{\mu\nu} = 0,$$

где $D^{ac}_\mu = \delta^{ac}\partial_\mu - g\varepsilon^{abc}A^b_\mu$. Последнему уравнению удовлетворяют следующие постоянные потенциалы:

$$A^{a\,\mu} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi^{\pm\,(a)}_\omega, \tag{2}$$

где единичный вектор $\chi^{\pm(a)}_\omega = (\pm i, \pm\omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$.

Для заданного лагранжианом (1) калибровочного поля плотность энергии $E = \mathcal{T}^{00}$ определяется из симметризованного тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{\theta^4}{32g^2}g^{\mu\nu}.$$

Нас не должен смущать знак «минус» перед полученным выражением, т. е. тот факт, что энергия поля отрицательна. Следует отметить, что величина $\theta$ является заданной и не подлежит варьированию.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}^{(1)}_G + \mathcal{E}^{(1)}_Q$$

с учетом вкладов как глюонной $\mathcal{E}^{(1)}_G$, так и кварковой $\mathcal{E}^{(1)}_Q$ петель.

Найдем сначала глюонный вклад в $V_{\text{eff}}$. Представим полное глюонное поле $\mathcal{A}^{a\,\mu}$ в виде фонового поля (2) и квантовых флуктуаций $a^{a\,\mu}$, т. е. $\mathcal{A}^{a\,\mu} = A^{a\,\mu} + a^{a\,\mu}$. Используя фейнмановскую калибровку с фоновым полем (2), получим лагранжиан флуктуаций

$$\mathcal{L}(a^b_\mu|A^b_\mu) = \mathcal{L}(a^b_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu a^{b\,\mu})^2 - \frac{\theta^2}{4}(a^{b\,\mu})^2 + \\ + g\varepsilon^{abc}A^a_\mu f^{b\,\mu\nu}a^c_\nu - g\varepsilon^{abc}A^c_\mu a^{b\,\mu}\partial_\nu a^{a\,\nu}.$$

Первое слагаемое в правой части — это лагранжиан вида (1) поля $a^b_\mu$, зависящий также от тензора напряженности поля флуктуаций $f^b_{\mu\nu}$.

Спектр энергии глюонов определяется девятью ветвями $\varepsilon_i^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda_i\theta^2/2$, где $\lambda_{1,2} = (3+2\sqrt{2})^{\pm1}$, $\lambda_{3,4} = (5+2\sqrt{6})^{\pm1}$, а коэффициенты $\lambda_{5,\ldots,9} = -1$ отвечают пятикратно вырожденной ветви спектра тахионных мод.

Однопетлевая поправка к энергии фонового калибровочного поля определяется согласно выражению (см., напр., [3]): $\mathcal{E}^{(1)}_G = \sum_{\mathbf{p},i}\varepsilon_i(\mathbf{p})$. Ввиду наличия тахионных мод мнимая часть энергии флуктуаций оказывается отличной от нуля:

$$\operatorname{Im}\mathcal{E}^{(1)}_G = -\frac{5}{12\sqrt{2}\pi}|\theta|^3.$$

Вещественная часть энергетической поправки расходится. Перенормированное выражение для нее, полученное с помощью представления собственного времени, имеет вид

$$\operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)\,\text{ren}}_G = \frac{\mu^{2\epsilon}}{4\pi\Gamma(\epsilon-1/2)} \times \\ \times \int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2-\epsilon}}\sum_{i=1}^4\left\{\exp\{-s\lambda_i\theta^2/2\} - \left(1 - s\lambda_i\frac{\theta^2}{2}\right)\right\}, \tag{3}$$

где $\mu$ — константа с размерностью массы. Разность $\operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)\,\text{ren}}_G \equiv \operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)\,\text{reg}}_G - \operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)\,\text{div}}_G$, где $\operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)\,\text{div}}_G$ является расходящейся в ультрафиолетовом пределе

($s \to 0$) частью, конечна в пределе $\epsilon \to 0$. Проводя интегрирование, приходим к выражению для глюонного вклада в эффективный потенциал:

$$V_{\text{eff}} \equiv E + \operatorname{Re}\mathcal{E}_G^{(1)\,\text{ren}} = -\frac{\theta^4}{32g^2} - \frac{|\theta|^3}{\pi}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6}\right).$$

Важно заметить, что при обычном представлении в размерной регуляризации для интегралов, подобных входящим в выражение (3) в виде вычитаемого полинома, подразумевается, что они обращаются в нуль [4]. Поэтому можно сказать, что расходящаяся часть эффективного потенциала равна нулю, т.е. $\operatorname{Re}\mathcal{E}_G^{(1)\,\text{div}} = 0$, а затравочные массы и константы связи не перенормируются. Это согласуется с суперперенормируемостью калибровочных теорий в трехмерном пространстве [2, 5].

Представляет интерес рассмотреть также вклад фермионов в эффективный потенциал. Выберем представление $\gamma$-матриц в пространстве $d = 2+1$ в виде $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^{1,2} = i\sigma^{1,2}$, где $\sigma^i$ — матрицы Паули. В постановке настоящей задачи возможны два различных состояния кварка, которые отвечают различным цветам в фундаментальном представлении группы $SU(2)$. Спиноры при $d=3$ являются двухкомпонентными величинами, а спиновые коэффициенты и знак энергии оказываются жестко связанными друг с другом [1, 6]. Энергетический спектр кварков во внешнем поле (2) определяется стационарными решениями уравнения Дирака [3].

Решение уравнения Дирака дает две различные ветви энергетического спектра кварков во внешнем поле (2): $\varepsilon_1^2 = \mathbf{p}^2 + (\tilde\theta - m)^2$, $\varepsilon_2^2 = \mathbf{p}^2 + (\tilde\theta + m)^2 - 4\tilde\theta^2$, где $\tilde\theta = \theta/4$. Эти ветви, однако, совпадают, если $m = \tilde\theta$, что соответствует равенству нулю эффективной массы кварка в данном поле и восстановлению киральной симметрии. Следует отметить, что в случае, когда $-\tilde\theta - 2|\tilde\theta| < m < -\tilde\theta + 2|\tilde\theta|$, в спектре кварков будут присутствовать тахионные моды, поскольку для некоторых значений импульса $\varepsilon_2^2 < 0$.

Ветви спектра энергии отвечают двум различным проекциям изотопического спина частицы на вектор $J^a$, так что для оператора $\mathbf{J} = J^a\tau^a/2 = g\tilde\theta^{-1}A^\mu p_\mu - \omega\gamma^0\tau^3(p_\mu\gamma^\mu + \tilde\theta - m)$ на стационарных решениях уравнения Дирака справедливо равенство $\mathbf{J}\Psi_s = (-1)^s(\tilde\theta - m)\Psi_s$ для $s = 1, 2$, где $\Psi_s$ — спинор, являющийся собственным вектором оператора Гамильтона с собственным значением $\varepsilon_s$. При этом для $m = \tilde\theta$ имеем $\Psi_1 = \Psi_2$.

Вещественная часть однопетлевого вклада фермионов в энергию вакуума определяется выражением

$$\operatorname{Re}\mathcal{E}_Q^{(1)} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{p}\,\varepsilon_1 - \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\mathbf{p}|=p_*}^{\infty} d\mathbf{p}\,\varepsilon_2,$$

где $p_* = [(\tilde\theta - m)(3\tilde\theta + m)]^{1/2}\Theta((\tilde\theta - m)(3\tilde\theta + m))$ есть наименьший импульс, при котором не возникает тахионных мод в спектре энергии кварка. Функция скачка определена так, что $\Theta(x) = 1$ для $x \geqslant 0$ и $\Theta(x) = 0$ для $x < 0$. Знак «минус» перед вещественной частью возникает благодаря ферми-статистике кварков. В результате находим перенормированное выражение:

$$\operatorname{Re}\mathcal{E}_Q^{(1)\,\text{ren}} = \frac{1}{6\pi}\Big\{|m - \tilde\theta|\Big((m-\tilde\theta)^2 - \frac{3|m|}{4}|m + 3\tilde\theta|\Big) - \\ - \frac{|m|}{4}(m - \tilde\theta)(5m - \tilde\theta) + |m|\tilde\theta^2 + \\ + \Big[(m-\tilde\theta)(m+3\tilde\theta)\Big]^{3/2}\Theta\Big((m+\tilde\theta)^2 - 4\tilde\theta^2\Big)\Big\}.$$

При этом вклад кварков имеет противоположный знак по отношению к вкладу глюонов. Мнимая часть, как и в случае глюонов, конечна и отлична от нуля лишь в присутствии в спектре кварков тахионных мод. Окончательное выражение для мнимой части имеет следующий простой вид:

$$\operatorname{Im}\mathcal{E}_Q^{(1)} = -(6\pi)^{-1}|(m-\tilde\theta)(m+3\tilde\theta)|^{3/2}\Theta(4\tilde\theta^2 - (m+\tilde\theta)^2).$$

В частности, для предела нулевой массы кварка $m \to 0$ получаем

$$\operatorname{Re}\mathcal{E}_Q^{(1)} = |\tilde\theta|^3/(6\pi), \qquad \operatorname{Im}\mathcal{E}_Q^{(1)} = -\sqrt{3}|\tilde\theta|^3/(2\pi).$$

Отметим, что вакуумная поправка за счет глюонов отрицательна, т.е. энергия данной конфигурации калибровочного поля остается меньше энергии пертурбативного вакуума. Присутствие тахионных мод в спектре кварков и глюонов приводит к наличию мнимой части в энергии вакуумных флуктуаций, что свидетельствует о неустойчивости данного состояния. Заметим, что учет дополнительных факторов, таких, как конечность области локализации поля, конечных температур, и учет высших петель могли бы привести к стабилизации конфигураций, подобных рассмотренным в настоящей статье.

**Литература**


1. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* // Ann. of Phys. (N.Y.) 1982. **140**. P. 372.
2. *Jackiw R., Templeton S.* // Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 2291.
3. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М., 1986.
4. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1988; *Trottier H.D.* // Phys. Rev. 1991. **D44**. P. 464.
5. *Templeton S.* // Phys. Rev. 1981. **D24**. P. 3134.
6. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 975.


Поступила в редакцию
27.11.98