УДК 519.2:534

РЕДУКЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТА КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К. В. Кириллов, А. И. Чуличков

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Решаются задачи оценивания параметров объекта при нечетких ограничениях на координаты векторов шума и входного сигнала в заданных ортонормированных базисах соответствующих пространств.

Рассмотрим типичную математическую модель физического эксперимента, проводимого по линейной схеме измерений:

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

где ξ— искаженный шумом ν выходной сигнал Af прибора A, на вход которого поступил сигнал $f \in \mathcal{F}$ от изучаемого объекта и среды, Uf — параметры объекта, интересующие исследователя, A: $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$, U: $\mathcal{F} \to \mathcal{U}$ — заданные операторы, моделирующие измерительный прибор и связь сигнала f с параметрами объекта, не возмущенного измерением, $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ — конечномерные евклидовы пространства. Задача редукции состоит в определении оценки $d(\cdot)\mathcal{R} \to \mathcal{U}$ таким образом, чтобы элемент $d(\xi)$ можно было считать наиболее точной версией Uf параметров объекта.

Хорошо известны традиционные теоретико-вероятностные методы решения задачи редукции для моделей $[A, \Sigma]$ и $[A, F, f_0, \Sigma]$, основанные на алгоритмах, минимизирующих среднеквадратичную ошибку интерпретации [1]. В теории возможностей методы оптимального оценивания строятся на использовании аналогичного принципа минимизации необходимости ошибки оценивания. В работе [2] рассмотрена задача оценивания сигнала Uf при нечетких ограничениях на энергию сигналов ν и f. В настоящей работе изучаются задачи оценивания при нечетких ограничениях на координаты векторов ν и f в заданных ортонормированных базисах соответствующих пространств.

1. Редукция экспериментальных данных в случае отсутствия априорной информации о сигнале

Пусть ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}$, $\mu^\nu(\cdot)$: $\mathcal{R} \to [0,1]$ — его распределение возможности, тогда ξ — тоже нечеткий элемент $\mathcal{R}$, имеющий распределение $\mu^\xi(x,f) = \mu^\nu(x - Af)$, $x \in \mathcal{R}$, зависящее от $f \in \mathcal{F}$ как от параметра. Таким образом, задана модель $[A, \mu^\nu(\cdot)]$ схемы измерения (1), аналогичная схеме $[A, \Sigma]$ в теории вероятностей [1].

Введем нечеткое отношение погрешности $(U \times U, l(\cdot,\cdot))$, где $l(Uf, u)$ — возможность ошибки при выборе $u \in \mathcal{U}$ в качестве значений параметров объекта Uf. Качество оценки $d(\cdot)$ будем описывать величиной необходимости ошибки оценивания [2, 3]

$$M(d(\cdot)) = \neg \sup_{x \in \mathcal{R}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\mu^\nu(x - Af), \neg l(Uf, d(x))).$$

Оптимальную оценку $d^*(\cdot)$ определим из условия $M(d^*(\cdot)) = \min\limits_{d(\cdot):\ \mathcal{R} \to \mathcal{U}} M(d(\cdot))$.

Рассмотрим нечеткое отношение погрешности вида

$$l(u,v) = l^0(u,v) = \begin{cases} > 0 & u \neq \nu, \\ 0, & u = \nu, \end{cases} \qquad u,\ \nu \in U.$$

Согласно [2], в этом случае $d^*(x) = Uf^*(x)$, где $f^*(x)$ — оценка максимальной возможности, определяемая как решение задачи

$$\mu^\nu(x - Af^*(x)) = \max_{f \in \mathcal{F}} \mu^\nu(x - Af). \tag{2}$$

Пусть координаты ν_i вектора шума ν, заданные в некотором ортонормированном базисе $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, пространства $\mathcal{R}$, независимы, т.е. их распределения $\mu^{\nu_i}(z_i)$ связаны с распределением $\mu^\nu(z)$ вектора ν следующим образом: $\mu^\nu(z) = \min\limits_i \mu^{\nu_i}(z_i)$, $z \in \mathcal{R}$, причем $\mu^{\nu_i}(z_i) = \rho(|z_i|)$, где $\rho(\cdot)$: $\mathcal{R}_+ \to [0,1]$ — строго монотонно убывающая функция. Обозначим $a_i = (A_{i1}, \ldots, A_{iK})$ строку матрицы оператора A в ортонормированных базисах $\{e_i\} \subset \mathcal{R}$ и $\{g_j\} \subset \mathcal{F}$. Тогда вместо (2) получим $\min\limits_i \rho(|x_i - (a_i, f^*)|) = \max\limits_f \min\limits_i \rho(|x_i - (a_i, f)|)$, что в силу строго монотонного убывания $\rho(\cdot)$ переходит в задачу вида

$$\max_i |x_i - (a_i, f^*)| = \min_f \max_i |x_i - (a_i, f)|. \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть в схеме измерения* (1) A: $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$ *— заданный линейный оператор,* f *— априори произвольный элемент* $\mathcal{F}$, ν *— нечеткий элемент* $\mathcal{R}$, *заданный функцией распределения* $\mu^\nu(z)$, *координаты которого* ν_i *независимы, причем их распределения* $\mu^\nu(z_i)$ *имеют вид* $\mu^{\nu_i}(z_i) = \rho(|z_i|)$, *где* $\rho(|\cdot|)$ *— строго монотонно убывающая функция. Тогда оптимальная оценка* $d^*(\xi) = Uf^*(\xi)$, *где* f^* *— решение задачи линейного программирования:*

$$\begin{cases} (c, y) \sim \min, \\ (y, b_1^i) \geqslant x_i, & i = 1, \ldots, N, \\ (y, b_2^i) \geqslant -x_i, \end{cases} \tag{4}$$

$c=(1,0,\dots,0)\in\mathcal{R}_{K+1}$, $y=(u,f_1,\dots,f_K)$, $b_1^i=(1,A_{i1},\dots,A_{iK})$ *и* $b_2^i=(1,-A_{i1},\dots,-A_{iK})$; *координаты векторов* f *и* ν, *а также элементы матрицы оператора* A *заданы в некоторых ортонормированных базисах* $\{e_i\}\subset\mathcal{R}$ *и* $\{g_j\}\subset\mathcal{F}$, $j=1,\dots,K$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(f)=\max\limits_i|x_i-(a_i,f)|$. Поскольку для всех i $u\geqslant|x_i-(a_i,f)|$, функция $u(f)$ может быть определена как решение системы $2N$ неравенств:

$$\begin{cases} u+(a_i,f)\geqslant x_i, \\ u-(a_i,f)\geqslant -x_i, \end{cases} \quad i=1,\dots,N. \tag{5}$$

Вектор f^*, на котором достигается минимальное значение переменной u, удовлетворяющей системе неравенств (5), очевидно, и будет решением исходной задачи (3). Систему (5) можно записать в виде (4), что соответствует стандартному виду задачи линейного программирования. Утверждение теоремы 1 позволяет найти оптимальную оценку Uf^* параметров объекта Uf с помощью известных алгоритмов решения задачи линейного программирования [4].

2. Редукция экспериментальных данных при наличии априорной информации

Вернемся к задаче (1) редукции измерения $\xi=Af+\nu$, в которой теперь шум $\nu\in\mathcal{R}$ и сигнал $f\in\mathcal{F}$ являются независимыми нечеткими элементами с известными функциями распределения $\mu^\nu(\cdot)$: $\mathcal{R}\to[0,1]$ и $\mu^f(\cdot)$: $\mathcal{F}\to[0,1]$, т.е. задана модель $[A,\mu^\nu(\cdot),\mu^f(\cdot)]$ схемы измерения (1), аналогичная модели $[A,F,\Sigma]$ в теории вероятностей [1]. Требуется найти функцию $d(\cdot)\mathcal{R}\to\mathcal{U}$ такую, чтобы элемент $d(\xi)$ был наиболее точной версией параметров объекта Uf. Согласно [2, 3], оптимальная оценка $d^*(\cdot)=Ut^*(\cdot)$ определяется как решение задачи на максимум:

$$\mu^{\xi,f}(x,t)\sim\max_{t\in\mathcal{F}}, \tag{6}$$

где $\mu^{\xi,f}(x,t)=\min(\mu^{\xi|f}(x|t),\mu^f(t))$ — совместное распределение нечетких элементов ξ и f, $\mu^{\xi|f}(x|t)=\mu^\nu(x-At)$ — условное распределение ξ при условии f, т.е. возможность равенства $\xi=x$ при условии, что $f=t$, $t\in\mathcal{F}$. Аналогично теореме 1 может быть доказана следующая теорема.

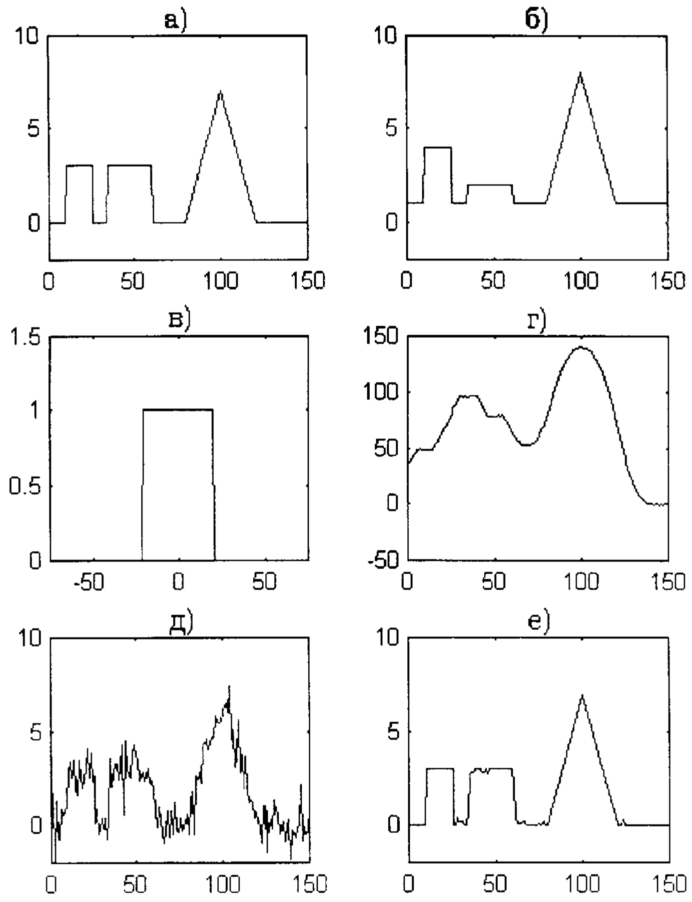
Теорема 2. *Пусть в схеме измерения* (1) A: $\mathcal{F}\to\mathcal{R}$ *— заданный линейный оператор,* $f\in\mathcal{R}$ *и* $\nu\in\mathcal{F}$ *— независимые нечеткие элементы с заданными функциями распределения* $\mu^\nu(\cdot)$: $\mathcal{R}\to[0,1]$ *и* $\mu^f(\cdot)$: $\mathcal{F}\to[0,1]$, *причем координаты* ν_i *и* f_i *независимы и их распределения имеют вид* $\mu^{\nu_i}(z_i)=\rho(|z_i|)$ *и* $\mu^{f_j}(t_j)=\rho(|f_{0j}-d_{0j}\cdot t_j|)$, *где* $f_{0j}\in R_1$ *и* $d_{0j}\in R_1$ *— заданные постоянные и* $\rho(|\cdot|)$ *— строго монотонно убывающая функция. Тогда оптимальная оценка* $d^*(\xi)=Ut^*(\xi)$, *где* t^* *— решение задачи линейного программирования:*

$$\begin{cases} (c,y)\sim\min, \\ (y,b_1^i)\geqslant x_i, \\ (y,b_2^i)\geqslant -x_i, \\ (y,b_3^j)\geqslant f_{0j}, \\ (y,b_4^j)\geqslant -f_{0j}, \end{cases} \quad i=1,\dots,N,\quad j=1,\dots,K, \tag{7}$$

в которой $c=(1,0,\dots,0)\in\mathcal{R}_{N+1}$, $y=(u,t_1,\dots,t_K)$, $b_1^i=(1,A_{i1},\dots,A_{iK})$, $b_2^i=(1,-A_{i1},\dots,-A_{iK})$, $b_3^j=(1,0,\dots,0,d_{0j},0,\dots,0)\in\mathcal{R}_{K+1}$, $(b_3^j)_{j+1}=d_{0j}$, $b_4^j=(1,0,\dots,0,-d_{0j},0,\dots,0)\in\mathcal{R}_{K+1}$, $(b_4^j)_{j+1}=-d_{0j}$.

Как и в п. 1, задача сводится к обычному виду задачи линейного программирования, решение ее и оптимальная оценка $d^*(x)=Ut^*(x)$ могут быть найдены с помощью известных методов [4].

На рисунке приведен пример использования теоретико-возможностных методов редукции измерений (7) в сравнении с результатами теоретико-вероятностных методов [1].



Теоретико-возможностная редукция измерений (7): *а* — сигнал f на входе прибора A, *б* — априорный вид f_0 входного сигнала f, *в* — аппаратная функция прибора A: $(Af)_i=\sum\limits_{j=1}^K a_{i-j}f_j$, *г* — результаты измерения $\xi=Af+\nu$, *д* — теоретико-вероятностная редукция измерения $f=(A^*A)^-A^*\xi$, *е* — теоретико-возможностная редукция измерения (7)

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 1. P. 1).
3. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № 6. С. 3 (Ibid. 1998. No. 6. P. 1).
4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Поступила в редакцию
27.11.98

УДК 519.6

МЕТОД РАСШИРЯЮЩИХСЯ КОМПАКТОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ УСЛОВИИ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ

А. Г. Ягола, К. Ю. Дорофеев

(*кафедра математики*)

Показано, что часто используемое в теоретических исследованиях условие истокопредставимости точного решения операторного уравнения I рода позволяет не только построить оптимальный по порядку точности метод, но и получить апостериорную оценку погрешности. Предлагается метод расширяющихся компактов.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U.

Пусть известно, что точной правой части $\overline{u} \in U$ соответствует единственное точное решение $\overline{z} \in Z$, и вместо $\overline{u}$ заданы $u_\delta \in U$ и $\delta > 0$ такие, что $||u_\delta - u|| \leqslant \delta$. Задача приближенного решения уравнения (1) может быть некорректно поставлена, например, если оператор A вполне непрерывный [1, 2].

Пусть теперь задана следующая априорная информация: точное решение $\overline{z}$ истокообразно представимо с помощью вполне непрерывного оператора B, действующего из нормированного пространства V в Z:

$$\overline{z} = B\overline{v}. \tag{2}$$

Для простоты будем считать оператор B инъективным, поэтому $\overline{v}$ единственно. Рассмотрим следующий метод решения задачи (1) с априорной информацией (2) по заданным данным $\{u_\delta, \delta\}$: определим функционал

$$\Phi(z) = ||Az - u_\delta|| \tag{3}$$

и множество

$$Z_n = \{z \in Z\colon\ z = Bv,\ v \in V,\ ||v|| \leqslant n\}, \tag{4}$$

где n — фиксированное натуральное число.

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Положить $n = 1$.
2. Найти
$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z). \tag{5}$$
3. Если
$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z) \leqslant \delta, \tag{6}$$
то перейти к п. 5.
4. Увеличить n на единицу, перейти к п. 2.
5. Положить $n(\delta) = n$ и
$$z_{n(\delta)} = \arg\min_{z \in Z_{n(\delta)}} \Phi(z). \tag{7}$$

Будем рассматривать $z_{n(\delta)}$ как приближенные решения (1).

Заметим, что $z_{n(\delta)} \in Z_{n(\delta)}$ удовлетворяет неравенству

$$||Az_{n(\delta)} - u_\delta|| \leqslant \delta \tag{8}$$

и на шаге 3 алгоритма в качестве критерия останова процесса минимизации можно использовать аналогичное неравенство, т.е. если в процессе минимизации $\Phi(z)$ на Z_n найдется $z_n \in Z_n$ такое, что $||Az_n - u_\delta|| \leqslant \delta$, то процесс минимизации можно прекратить, положив $n(\delta) = n$ и $z_{n(\delta)} = z_n$.

Теорема 1. *Для любого $\delta > 0$ число $n(\delta)$ конечно. Существует $\delta_0 > 0$ (зависящее, вообще говоря, от $\overline{z}$) такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\overline{z}$ при $\delta \to 0$, т.е. предложенный метод решения является регуляризирующим по Тихонову.*

Доказательство. Шар $V_n = \{v \in V, ||v|| \leqslant n\}$ — замкнутое ограниченное множество в V. В силу того что оператор B вполне непрерывен, $Z_n = BV_n$ — компакт в Z для любого n. Поэтому по теореме Вейерштрасса (см., напр., [2]) непрерывный функционал $\Phi(z) = ||Az - u_\delta||$ достигает своей точной нижней грани на Z_n в (возможно, не единственной) точке $z_n \in Z_n$.

Конечность и существование $\delta_0 > 0$ такого, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$, следует из того, что $\overline{z} = B\overline{v} \in Z_N$, где

$$N = \begin{cases} ||\overline{v}||, & \text{если } ||\overline{v}|| \text{ — натуральное число;} \\ [||\overline{v}||] + 1, & \text{если } ||\overline{v}|| \text{ — не натуральное число.} \end{cases}$$