**Литература**

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 1. P. 1).
3. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № 6. С. 3 (Ibid. 1998. No. 6. P. 1).
4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Поступила в редакцию
27.11.98

УДК 519.6

# МЕТОД РАСШИРЯЮЩИХСЯ КОМПАКТОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ УСЛОВИИ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ

**А. Г. Ягола, К. Ю. Дорофеев**

(*кафедра математики*)

**Показано, что часто используемое в теоретических исследованиях условие истокопредставимости точного решения операторного уравнения I рода позволяет не только построить оптимальный по порядку точности метод, но и получить апостериорную оценку погрешности. Предлагается метод расширяющихся компактов.**

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \tag{1}$$

где $A$ — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства $Z$ в нормированное пространство $U$.

Пусть известно, что точной правой части $\overline{u} \in U$ соответствует единственное точное решение $\overline{z} \in Z$, и вместо $\overline{u}$ заданы $u_\delta \in U$ и $\delta > 0$ такие, что $||u_\delta - u|| \leqslant \delta$. Задача приближенного решения уравнения (1) может быть некорректно поставлена, например, если оператор $A$ вполне непрерывный [1, 2].

Пусть теперь задана следующая априорная информация: точное решение $\overline{z}$ истокообразно представимо с помощью вполне непрерывного оператора $B$, действующего из нормированного пространства $V$ в $Z$:

$$\overline{z} = B\overline{v}. \tag{2}$$

Для простоты будем считать оператор $B$ инъективным, поэтому $\overline{v}$ единственно. Рассмотрим следующий метод решения задачи (1) с априорной информацией (2) по заданным данным $\{u_\delta, \delta\}$: определим функционал

$$\Phi(z) = ||Az - u_\delta|| \tag{3}$$

и множество

$$Z_n = \{z \in Z\colon\ z = Bv,\ v \in V,\ ||v|| \leqslant n\}, \tag{4}$$

где $n$ — фиксированное натуральное число.

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Положить $n = 1$.
2. Найти
$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z). \tag{5}$$
3. Если
$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z) \leqslant \delta, \tag{6}$$
то перейти к п. 5.
4. Увеличить $n$ на единицу, перейти к п. 2.
5. Положить $n(\delta) = n$ и
$$z_{n(\delta)} = \arg\min_{z \in Z_{n(\delta)}} \Phi(z). \tag{7}$$

Будем рассматривать $z_{n(\delta)}$ как приближенные решения (1).

Заметим, что $z_{n(\delta)} \in Z_{n(\delta)}$ удовлетворяет неравенству

$$||Az_{n(\delta)} - u_\delta|| \leqslant \delta \tag{8}$$

и на шаге 3 алгоритма в качестве критерия останова процесса минимизации можно использовать аналогичное неравенство, т.е. если в процессе минимизации $\Phi(z)$ на $Z_n$ найдется $z_n \in Z_n$ такое, что $||Az_n - u_\delta|| \leqslant \delta$, то процесс минимизации можно прекратить, положив $n(\delta) = n$ и $z_{n(\delta)} = z_n$.

Т е о р е м а 1. *Для любого $\delta > 0$ число $n(\delta)$ конечно. Существует $\delta_0 > 0$ (зависящее, вообще говоря, от $\overline{z}$) такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\overline{z}$ при $\delta \to 0$, т.е. предложенный метод решения является регуляризирующим по Тихонову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Шар $V_n = \{v \in V, ||v|| \leqslant n\}$ — замкнутое ограниченное множество в $V$. В силу того что оператор $B$ вполне непрерывен, $Z_n = BV_n$ — компакт в $Z$ для любого $n$. Поэтому по теореме Вейерштрасса (см., напр., [2]) непрерывный функционал $\Phi(z) = ||Az - u_\delta||$ достигает своей точной нижней грани на $Z_n$ в (возможно, не единственной) точке $z_n \in Z_n$.

Конечность и существование $\delta_0 > 0$ такого, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$, следует из того, что $\overline{z} = B\overline{v} \in Z_N$, где

$$N = \begin{cases} ||\overline{v}||, & \text{если } ||\overline{v}|| \text{ — натуральное число;} \\ [||\overline{v}||] + 1, & \text{если } ||\overline{v}|| \text{ — не натуральное число.} \end{cases}$$

То, что $n(\delta)$ не может быть меньше $N$ для любого $\delta > 0$, легко доказывается от противного. Таким образом, для всех $0 < \delta \leqslant \delta_0$ приближенные решения $z_{n(\delta)}$ принадлежат компакту $Z_{n(\delta_0)}$, и предложенный метод становится методом квазирешений (см., напр., [1]). Сходимость $z_{n(\delta)}$ к $\overline{z}$ при $\delta \to 0$ немедленно следует из общей теории некорректных задач (см., напр., [1]). Тем самым предложенный алгоритм является регуляризирующим по Тихонову.

Замечание 1. Предложенный метод является вариантом метода расширяющихся множеств, впервые предложенного в работе [3]. Естественно назвать его методом расширяющихся компактов. В отличие от метода квазирешений компакт в методе расширяющихся компактов не задается априори, а выбирается алгоритмически.

Теорема 2. *Предложенный алгоритм допускает апостериорную оценку погрешности решения, т.е. существует функция $\Delta(\delta, u_\delta)$ такая, что $\Delta(\delta, u_\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\Delta(\delta, u_\delta) \geqslant ||z_{n(\delta)} - \overline{z}||$ по крайней мере для достаточно малых $\delta$.*

Доказательство. Определим $\Delta(\delta, u_\delta)$ как

$$\Delta(\delta, u_\delta) = \max_{z \in \{z \in Z_{n(\delta)}:\ ||Az - u_\delta|| \leqslant \delta\}} ||z - z_{n(\delta)}||. \qquad (9)$$

Поскольку $Z_{n(\delta)}$ — компакт, а оператор $A$ ограничен, то множество $\{z \in Z_{n(\delta)}:\ ||Az - u_\delta|| \leqslant \delta\}$ также компакт. Поэтому $\Delta(\delta, u_\delta) < +\infty$. Для всех $0 < \delta \leqslant \delta_0$ ($\delta_0$ определено в теореме 1) $\Delta(\delta, u_\delta) \geqslant ||z_{n(\delta)} - \overline{z}||$, поскольку $\overline{z} \in Z_{n(\delta)}$. Очевидно также, что $\Delta(\delta, u_\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Замечание 2. Хорошо известно (см., напр., [4] и краткий обзор в статье [5]), что невозможна равномерная оценка погрешности некорректных задач и даже оценка скорости сходимости регуляризированных приближений к точному решению может существовать только на некоторых подмножествах специального вида. Тем самым огромный интерес вызывают некорректные задачи, допускающие апостериорную оценку погрешности. Это понятие было введено в работе [6]. Существование апостериорной оценки в условиях теоремы 2 следует из результатов [6]. На самом деле, если мы обозначим $\overline{Z} = BV \subseteq Z$ пространство истокопредставимых с помощью оператора $B$ решений уравнения (1), то $\overline{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, а, как показано выше, $Z_n$ — компакт для любого $n$, т.е. $\overline{Z}$ $\sigma$-компактно.

В работе [6] было доказано существование апостериорных оценок в этом случае. Заметим также, что апостериорная оценка погрешности в методе расширяющихся компактов в принципе может вычисляться наряду с приближенным решением уравнения (1). Хотя апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в обычном смысле для любого $\delta > 0$, она становится оценкой сверху погрешности приближенного решения начиная с некоторого $\delta_0 > 0$, которое зависит от точного решения $\overline{z}$.

Пусть теперь $A$ — вполне непрерывный инъективный оператор, пространства $Z$ и $U$ гильбертовы, $V = Z$, $B = (A^*A)^{p/2}$, $p = \text{const} > 0$.

Такая истокопредставимость решения

$$\overline{z} = (A^*A)^{p/2}\overline{v}, \quad \overline{v} \in Z, \qquad (10)$$

очень часто используется в литературе по некорректным задачам для получения оценок скорости сходимости и сравнения регуляризирующих алгоритмов (см., напр., [4, 5, 7–11]). Ранее уже отмечалось [5, 12, 13], что использование априорной информации об истокообразной представимости решения в форме (10) позволяет сразу же построить оптимальные по точности алгоритмы на базе известных методов (невязки, квазирешений, метода Тихонова с выбором параметра регуляризации по (обобщенному) принципу невязки). Ниже мы покажем, что метод расширяющихся компактов не только является оптимальным по порядку, но и позволяет получить апостериорную оценку погрешности решения.

Лемма. *Оператор $(A^*A)^{p/2}$ является вполне непрерывным и инъективным из $Z$ в $Z$ для любого $p > 0$.*

Доказательство. Поскольку оператор $A$ — вполне непрерывный из $Z$ в $U$, то $A^*A$ — вполне непрерывный из $Z$ в $Z$ и самосопряженный. То, что $(A^*A)^{p/2}$ вполне непрерывный для любого $p > 0$, следует из известных свойств собственных значений вполне непрерывных самосопряженных операторов [14]. Инъективность $(A^*A)^{p/2}$ следует из инъективности $A$.

Рассмотрим теперь описанный выше метод расширяющихся компактов, положив $B = (A^*A)^{p/2}$. Очевидно, что теоремы 1 и 2 остаются в силе, т.е. наличие априорной информации об истокопредставимости решения позволяет построить регуляризирующий алгоритм с апостериорной оценкой погрешности решения.

Имеет место также

Теорема 3. *Метод расширяющихся компактов в случае, когда $A$ — вполне непрерывный инъективный оператор, $V = Z$, $U$ — гильбертовы пространства, $B = (A^*A)^{p/2}$, $p = \text{const} > 0$, является оптимальным по порядку точности (его точность не хуже $O(\delta^{p/(p+1)})$).*

Доказательство. Для всех $0 < \delta \leqslant \delta_0$ ($\delta_0$ определено в теореме 1) метод расширяющихся компактов совпадает с методом квазирешений на выпуклом уравновешенном компакте $BV_{n(\delta_0)}$. Поэтому (см., напр., [4]) метод является оптимальным по порядку точности. Согласно доказанному в [8], точность метода не хуже $O(\delta^{p/(p+1)})$.

В заключение заметим, что в методе расширяющихся компактов вместо последовательности натуральных чисел $n = 1, 2, \ldots$ можно использовать любую монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ такую, что $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$.

Заметим также, что «расширение» компактов необязательно производить относительно начала координат. Например, если задана функция $z_0 = Bv_0$ такая, что решение уравнения (1) из априорных соображений следует искать в окрестности $z_0$, то метод соответствующим образом должен быть изменен.

Случай, когда операторы $A$ и $B$ заданы с ошибками, будет рассмотрен в последующих публикациях.

Статья написана во время научной командировки первого автора в г. Зиген (Германия) при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского общества (DFG) (грант 436 RUS 17/61/98). Работа поддержана также программой «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант 4-5220).

**Литература**

1. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М., 1990.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М., 1995.
3. *Будак Б.М., Виньоли А., Гапоненко Ю.Л.* // ДАН СССР. 1969. **184**. С. 12.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы в некорректных задачах. М., 1989.
5. *Leonov A.S., Yagola A.G.* // Inverse Problems. 1998. **14**. P. 1539.
6. *Винокуров В.А., Гапоненко Ю.Л.* // ДАН СССР. 1982. **263**. С. 277.
7. *Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И.* Оптимизация методов решения операторных уравнений. Свердловск, 1987.
8. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, 1982.
9. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М., 1986.
10. *Groetsch C.W.* The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Boston, MA, 1984.
11. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht, 1996.
12. *Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. №2. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 75).
13. *Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Журн. фундамент. и прикл. математики. 1998. **4**, №3. С. 1029.
14. *Рисс Ф., Сёкефальди-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.

Поступила в редакцию
30.12.98

## ГЕОФИЗИКА

УДК 551.465.63

# ВЛИЯНИЕ ВЗВЕСЕЙ НА ИЗМЕНЕНИЕ ТЕПЛОМАССООБМЕНА МЕЖДУ ОКЕАНОМ И АТМОСФЕРОЙ

**Ю. Г. Смирнова, Е. В. Караваева, Г. Г. Хунджуа**

(*кафедра физики атмосферы*)

**Лабораторные исследования показали, что потоки тепла с поверхности существенно зависят от наличия взвесей в воде.**

Известно, что в результате объемного поглощения солнечной радиации и турбулентного перемешивания в океане формируется квазиоднородный поверхностный слой (толщиной $\sim$100 м), служащий тепловым резервуаром для всех процессов тепломассообмена в системе океан–атмосфера. Сами же процессы тепломассообмена (испарение, ИК-излучение и контактный теплообмен) имеют место практически на поверхности океана, в слое толщиной $\sim$ 10 мкм (так называемый радиационный слой), формируя значительные градиенты температуры на границе раздела фаз.

Испарение и последующая конденсация водяного пара являются основными факторами в тепломассообмене между океаном и атмосферой и в формировании погоды и климата на Земле. Температура поверхности океана (ТПО) в соответствии с уравнением Клапейрона–Клаузиуса, которое связывает скорость изменения давления насыщенных паров у поверхности с поверхностной температурой, определяет интенсивность процессов обмена в системе океан–атмосфера.

Вследствие селективного поглощения вся инфракрасная часть (т.е. почти половина) солнечной радиации поглощается в первом же метровом слое воды [1]. Интенсивность поглощения определяется не только оптическими характеристиками самой воды, но и концентрацией органических и неорганических взвесей в поверхностном дневном слое. Изменение оптических характеристик верхнего метрового слоя океана, связанное с изменением концентрации органических и неорганических взвесей в процессе поглощения солнечной ИК-радиации, приводит к изменению ТПО, что ведет к изменению интенсивности тепломассообмена с атмосферой [2].

Наблюдения за динамикой диссипативных структур у неравновесной границы контакта вода–воздух были проведены в лабораторных условиях при помощи оригинальной аппаратуры. Измерения проводи-