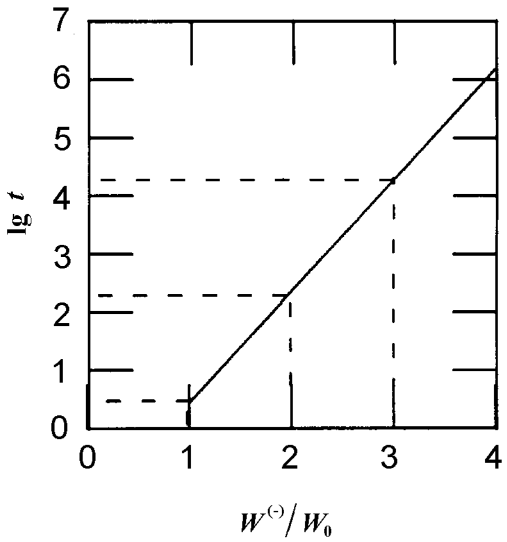

Рис. 2. Время жизни t контрастной структуры с заданной шириной пятна как функция отношения ширины пятна в начальный момент времени $W^{(-)}(t_0)$ к критическому значению $W_0 = \pi\delta$

поэтому приближенными формулами для скорости дрейфа ВПС и времени жизни КС можно пользоваться не только для случая широких пятен КС, но и при менее жестких ограничениях: $W^{(+)} \gg W^{(-)}$, $W^{(-)} > \pi\delta$. Более подробный анализ результатов компьютерного моделирования показывает, что погрешность формулы для времени жизни не превышает 1%. Из рис. 2 видно, что КС живет практически бесконечно большое время: $t > 10\,000$, если ширина обоих пятен (положительного и отрицательного) превышает критическую ширину $\pi\delta$ не менее чем в три раза. Если ширина пятна превышает критическую только в два раза, время жизни КС уменьшается в 30 раз. Наконец, пятно с толщиной порядка критической разрушается практически мгновенно. Эти результаты подтверждают предположение о лавинообразном характере процесса разрушения КС на поздней стадии, которая начинается, когда толщина пятна становится сравнимой с критическим значением.

Оценим время жизни КС магнитного поля в спиральных галактиках. Типичные параметры [3, 4] (в единицах длины 1 кпк и времени $5 \cdot 10^8$ лет, галактики M51, M81) $\mu = 0{,}0016$, $\gamma_0 = 4$, толщина ВПС порядка $\delta = 0{,}2$ кпк, что примерно в 100 раз меньше радиуса галактики $d = 20$ кпк. Формула (9) показывает, что в однородной среде с нулевой скоростью вещества ($\mathbf{V} = 0$) трудно ожидать наличия контрастных образований размером меньше $2\pi \cdot 0{,}2$ кпк $\simeq 1{,}2$ кпк (время их жизни меньше времени одного оборота галактики), но вполне возможно существование КС размером порядка $d \geqslant 1$кпк. Разумеется, направленное крупномасштабное движение вещества, которое в спиральных галактиках представлено дифференциальным вращением, приведет к более быстрому разрушению контрастных пятен магнитного поля за счет вытягивания и истончения, но рассмотрение этого эффекта выходит за рамки данной работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 95-01-01284а и 98-01-00356).

Авторы благодарны А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузову, Д. Д. Соколову и А. Шукурову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., 1984.
2. *Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D.* Magnetic Fields of Galaxies. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988.
3. *Poezd A.D., Shukurov A.M., Sokoloff D.D.* // Month. Not. of RAS. 1993. **264**. P. 285.
4. *Beck R., Brandenburg A., Moss D.* et al. // Astron. Astrophys. 1996. **34**. P. 153.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
6. *Васильева А.Б.* // Матем. моделирование. 1991. **3**, № 4. С. 114.
7. *Васильева А.Б.* // ЖВМ и МФ. 1995. **35**, № 4. С. 520.
8. *Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., 1968.

Поступила в редакцию
17.04.98

УДК 530.12

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВИССЕРА

М. М. Карецкий

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Найдено новое точное решение уравнений теории гравитации с массивным гравитоном в случае, когда источником гравитационного поля является плоская электромагнитная волна.

Можно ли присвоить гравитону массу? Имеет ли вообще смысл говорить о массивном гравитоне? Такие вопросы ставит Виссер (Visser) в своей работе [1]. Как известно из общей теории относительности Эйнштейна, гравитон должен быть безмассовым. Но астрофизические данные допускают [2] существование гравитона с массой

$$m_g < 2 \cdot 10^{-29}\ \text{эВ} \approx 2 \cdot 10^{-38} m_{\text{nucl}} \approx 3 \cdot 10^{-66}\ \text{кг}.$$

Соответствующая комптоновская длина волны для массивного гравитона равна

$$\lambda_g = \frac{\hbar}{m_g c} > 6 \cdot 10^{22} \text{ м} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ пк}.$$

Регистрация таких длинных волн является сложной технической задачей, до сих пор еще не решенной. Один из путей построения теории гравитации с массивным гравитоном, как и любой метрической теории [3], основан на использовании в уравнениях поля метрических тензоров двух геометрий.

Чтобы понять, какую геометрию следует выбрать в качестве основной, следует проанализировать существующую связь между законом сохранения энергии-импульса и геометрией пространства-времени. Известно, что в произвольном римановом пространстве-времени возможность получения соответствующего интегрального закона сохранения не гарантируется наличием дифференциального ковариантного уравнения сохранения, но целиком предопределяется его геометрией. С математической точки зрения наличие интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса является отражением определенных свойств пространства-времени — однородности и изотропности. Существуют три типа четырехмерных пространств, обладающих такими свойствами однородности и изотропности, что в них допускается введение десяти интегралов движения для замкнутой системы: пространство постоянной отрицательной кривизны $R < 0$ (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны $R = 0$ (псевдоевклидово пространство, или пространство Минковского) и пространство постоянной положительной кривизны $R > 0$ (пространство Римана).

Таким образом, для того чтобы иметь максимально возможное число сохраняющихся величин, в качестве естественной геометрии необходимо выбрать одну из перечисленных выше геометрий постоянной кривизны. Так, например, при исследовании релятивистской теории гравитации и ее эффектов [4–6] в качестве основной геометрии выбирается геометрия псевдоевклидова пространства-времени.

Виссер в своей работе [1] также использует эту геометрию, но масса гравитона в его уравнения поля входит иначе, чем в релятивистской теории гравитации. Так как такие теории гравитации являются нелинейными, то к настоящему времени в них найдено очень мало точных решений, одним из таких решений является метрика плоской электромагнитной волны в релятивистской теории гравитации [7]. Найдем решение аналогичной задачи в теории Виссера.

В этой теории функция действия имеет вид

$$S = \int d^4x \Big[-\frac{c^3}{16\pi G}\sqrt{-g}R(g) + \\ + \sqrt{-\gamma}\mathcal{L}_{\rm mas}(g,\gamma) + \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\rm mat}(g) \Big],$$

где γ^{ik} — фоновая метрика псевдоевклидова пространства-времени, g — метрика риманова пространства, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3·г$^{-1}$·с$^{-2}$, $\mathcal{L}_{\rm mat}$ — лагранжиан всех полей, кроме гравитационных, и в качестве лагранжиана, описывающего массивный гравитон, $\mathcal{L}_{\rm mas}(g,\gamma)$ была выбрана функция

$$\mathcal{L}_{\rm mas}(g,\gamma) = \frac{m_g^2 c^5}{32\pi G\hbar^2} \times \\ \times \int d^4x \Big\{ \gamma^{ik}(g-\gamma)_{il}\gamma^{lm}(g-\gamma)_{mk} - \frac{1}{2}\left[\gamma^{ik}(g-\gamma)_{ik}\right]^2 \Big\}.$$

При варьировании по метрике можно получить полевые уравнения:

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\Big) - \\ - \frac{m_g^2 c^2}{\hbar^2}\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\Big\{(g-\gamma)_{lm} - \frac{1}{2}\gamma_{ml}\gamma^{\mu\nu}(g-\gamma)_{\mu\nu}\Big\} \times \\ \times \Big(\frac{1}{2}g_{pq}\gamma^{mp}\gamma^{lq}g_{ik} - g_{ip}g_{kq}\gamma^{mp}\gamma^{lq}\Big). \qquad (1)$$

Найдем точное решение уравнений (1) в случае, когда источником гравитационного поля является плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси z. Уравнения электродинамики Максвелла в римановом пространстве имеют вид

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}g^{il}g^{km}F_{lm}\right) = 0. \qquad (2)$$

Совместное решение нелинейных тензорных уравнений (1) и (2) в общем случае представляет собой очень сложную задачу, поэтому мы сделаем некоторые предположения относительно выбора метрики g^{ik}.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну. Уравнения ее фронта [8] в римановом и псевдоевклидовом пространствах могут быть представлены в форме

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0, \quad \gamma^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0.$$

Потребуем одновременного выполнения этих уравнений и положим $g^{ik} = \gamma^{ik} + \xi^{ik}$, тогда

$$\gamma^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0, \qquad (3)$$

$$\xi^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0. \qquad (4)$$

Поскольку для плоской волны $S = S(t,z)$, то из (3) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial x^0} = \pm\frac{\partial S}{\partial x^3}.$$

Решением этого уравнения является волновая функция $S = S(ct \pm z)$, соответствующая распространению волны вдоль и против направления оси z. Выберем для определенности $S = S(ct - z)$. Из уравнения (4) получим соотношение, связывающее компоненты тензора ξ^{ik}:

$$\xi^{00}(\partial_0 S)^2 + 2\xi^{03}(\partial_0 S \partial_3 S) + \xi^{33}(\partial_3 S)^2 = 0,$$

$$\xi^{00} + \xi^{33} - 2\xi^{03} = 0.$$

Положим $\xi^{00} = \xi^{33} = \xi^{03} = -F(x^i)$, тогда метрика g^{ik} примет вид

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} -F+1 & 0 & 0 & -F \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -F & 0 & 0 & -(F+1) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Так как $S = S(ct - z)$, то и $F = F(ct - z)$ и $F_{ik} = F_{ik}(ct - z)$. То есть электромагнитная волна порождает гравитационное возмущение, которое распространяется вместе с ней со скоростью света. Подставив выбранную метрику в уравнения Максвелла (2), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^l} = 0, \quad \frac{\partial F_{03}}{\partial x^l} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial u} = \frac{\partial F_{13}}{\partial u}, \quad \frac{\partial F_{02}}{\partial u} = \frac{\partial F_{23}}{\partial u},$$

где сделана замена переменных $u = ct - z$. Решением этой системы являются функции

$$\begin{aligned} h_1(ct - z) &= F_{01} = F_{13} = E_x = -H_y, \\ h_2(ct - z) &= F_{02} = F_{23} = E_y = -H_x, \end{aligned} \qquad (6)$$

равные напряженностям электрического и магнитного полей и описывающие тот или иной волновой пакет.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в римановом пространстве имеет вид

$$T_{ik}^{em} = \frac{1}{4\pi}\left(- F_{il}F_{kp}g^{pl} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{\mu\nu}F_{pq}g^{p\mu}g^{q\nu}\right).$$

Подставляя T_{ik}^{em}, метрику (5) и тензор F_{ik} электромагнитного поля (6) в уравнение (1), получим решение поставленной задачи в виде

$$F = -\frac{2G\hbar^2}{m_g^2 c^6}(h_1^2 + h_2^2). \qquad (7)$$

Таким образом, мы получили новое точное решение нелинейной системы уравнений (1)–(2), описывающее гравитационное поле плоской электромагнитной волны в теории гравитации Виссера. Следует отметить, что, хотя уравнения (1) значительно отличаются от уравнений релятивистской теории гравитации, полученное нами решение (5)–(7) качественно совпадает с решением аналогичной задачи [7] в релятивистской теории гравитации.

Понятно, что физически допустимыми являются только те поля гравитации, т.е. те решения уравнений движения гравитационного поля, которые не разгоняют частицы до скоростей, больших скорости света в вакууме. Это приводит к тому, что должен выполняться принцип причинности [5], эквивалентный неравенству $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k < 0$, при $d\sigma^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k = 0$. Подстановка полученной нами метрики g^{ik} приводит к полному выполнению этого неравенства, поскольку $F(ct - z) \leqslant 0$. Значит, наше решение является физически оправданным.

Результат действия гравитационной волны можно рассмотреть несколько иначе, нежели как искривление псевдоевклидова пространства. Можно считать, что гравитационная волна, проходя мимо наблюдателя, как бы ускоряет его лабораторную систему координат, делая ее неинерциальной в псевдоевклидовом пространстве-времени. После прохождения волны система координат наблюдателя возвращается в исходное состояние, снова становясь инерциальной.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96/15-96674).

Литература

1. *Visser M.* Mass for the Graviton: Prepr. Washington University. 1997, qr-qc 9705051.
2. *Particle Data Group* // Phys. Rev. 1996. **D54**. P. 207.
3. *Денисов В.И., Умнов А.Н.* // ТМФ. 1997. **110**, №3. С. 470.
4. *Denisov V.I., Mehta B.V.* // Astron. Astrophys. Trans. 1997. **14**, No. 3. P. 165; *Денисов В.И., Мехта Б.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №3. С. 17 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 3. P. 10).
5. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Основы релятивистской теории гравитации. М., 1989.
6. *Денисов В.И.* // ТМФ. 1997. **111**, №1. С. 144; №2. С. 312; 1997. **112**, № 2. С. 337.
7. *Денисова И.П.* // ТМФ. 1997. **112**, №3. С. 501; 1997. **113**, № 1. С. 162; ДАН. 1998. **360**, № 3. С. 335.
8. *Denisova I.P., Dalal M.* // J. Math. Phys. 1997. **38**, No. 11. P. 5820.

Поступила в редакцию
18.05.98