

РАДИОФИЗИКА

УДК 517.926

**ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ  
ВАН ДЕР ПОЛЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**В. Ф. Камбулов<sup>\*)</sup>, А. Ю. Колесов<sup>\*)</sup>, Н. Х. Розов**

(кафедра дифференциальных уравнений)

Исследуется математическая модель распределенного аналога генератора Ван дер Поля, представляющая собой линейную систему телеграфных уравнений с нелинейностью в одном из граничных условий. В результате теоретического исследования выявляется феномен буферности, т. е. одновременное существование у рассматриваемой краевой задачи нескольких устойчивых периодических режимов. Приводятся результаты эксперимента, подтверждающего физическую реализуемость данного феномена.

Автогенераторы с распределенными параметрами (АРП) привлекают интерес исследователей в связи с интенсивным развитием микроэлектроники и появившейся возможностью их реализации. В частности, актуальна проблема создания АРП, «подобных» уже известным генераторам на сосредоточенных элементах. Например, в работах [1, 2] предложена и изучена математическая модель АРП, представляющего собой аналог классического однолампового генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи сетки [3].

В настоящей работе, продолжающей исследования [1, 2], проводится теоретический анализ автоколебательных процессов в АРП-аналоге генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3]. Полученные выводы иллюстрируются результатами специального эксперимента.

1. Рассмотрим АРП, принципиальная блок-схема которого показана на рис. 1, а. Его характерная особенность состоит в том, что он имеет две линии, параметры каждой из которых (индуктивность  $L_j$ , ем-

кость  $C_j$  и активное сопротивление  $R_j$ ,  $j = 1, 2$ ) равномерно распределены на некоторых отрезках проводников одной и той же длины  $l$  (в обоих случаях пренебрегаем распределенной проводимостью). Считаем также, что между линиями существует взаимная индукция, характеризующаяся коэффициентами  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ . Будем предполагать, что в нелинейном элементе (в простейшем случае — в классической лампе) ток  $I$  зависит от приложенного напряжения  $u$  так, как показано на рис. 1, б.

Обозначим через  $u_j$ ,  $i_j$ ,  $j = 1, 2$ , переменные составляющие напряжения и силы тока в линиях. Как известно, они связаны системой телеграфных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M_1 \frac{\partial i_2}{\partial t}, & \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -R_2 i_2 - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, & \frac{\partial i_2}{\partial x} &= -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

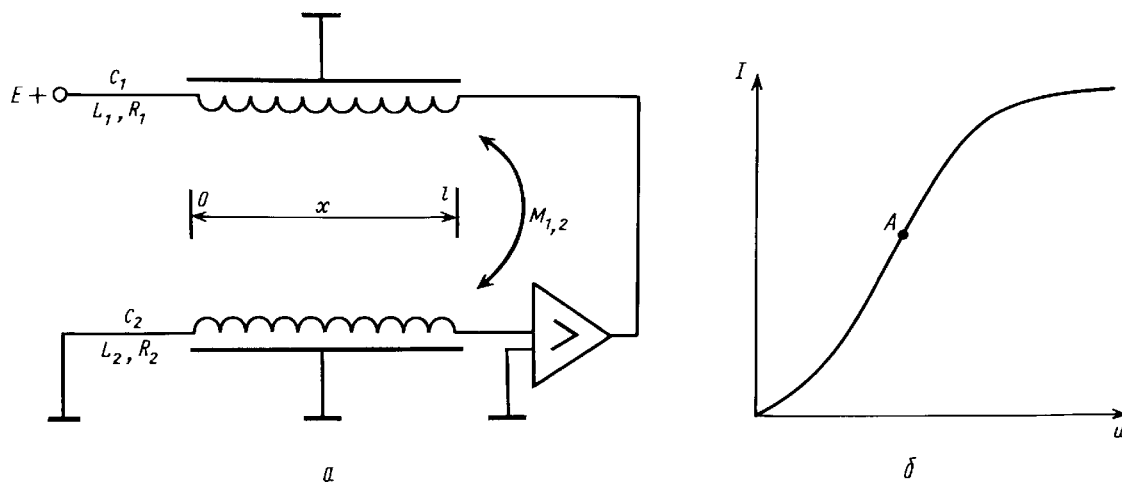


Рис. 1

<sup>\*)</sup> Ярославский государственный университет.

В нашем случае систему следует рассматривать на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , дополнив граничными условиями:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$i_1|_{x=l} = (s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3)|_{x=l}, \quad i_2|_{x=l} = 0,$$

где  $s_0 > 0$ ,  $s_2 > 0$ , а знак  $s_1$  произволен.

Поясним происхождение граничных условий (2). К первому из них приходим в предположении, что источник постоянного напряжения  $+E$  «шунтирован» достаточно большой емкостью и, следовательно, первая линия имеет на конце  $x = 0$  нулевое значение переменной составляющей напряжения. Второе условие — следствие заземленности второй линии в точке  $x = 0$ , а последнее вытекает из допущения идеальности усилителя (наличия у него бесконечно большого входного активного сопротивления). Наконец, фигурирующее в (2) нелинейное условие объясняется тем, что характеристика нелинейного элемента, связывающего две рассматриваемые линии, аппроксимируется в окрестности рабочей точки  $A$  (см. рис. 1, б) кубическим полиномом с коэффициентами  $s_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

Краевая задача (1), (2) представляет собой общую математическую модель автогенератора, содержащего две  $LCR$ -линии, между которыми существует взаимная индукция, и нелинейный элемент. Однако ниже мы будем изучать лишь случай  $C_2 = 0$ , который можно рассматривать как математическую модель АРП-аналога классического генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3]. Отметим, что первая линия играет здесь роль «колебательного контура в цепи анода». Вторая линия вспомогательная, так как при  $C_2 = 0$  автоматически получаем  $i_2 \equiv 0$ , т. е. она создает (посредством взаимной индукции) цепь обратной связи между основной линией и усилителем.

Итак, исследуется краевая задача

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad (3)$$

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} = 0,$$

$$i_1|_{x=l} = (s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3)|_{x=l},$$

получающаяся из задачи (1), (2) при  $i_2 = 0$ . Для удобства ее анализа сначала исключим переменную  $u_2$ :

$$u_2 = -\frac{M_2}{L_1} u_1 - \frac{M_2 R_1}{L_1} \int_0^x i_1(t, s) ds. \quad (4)$$

После выполнения в равенствах (3), (4) замен  $x/l \rightarrow x$ ,  $t/(l\sqrt{L_1 C_1}) \rightarrow t$ ,  $u_1 = u$ ,  $i_1 = v\sqrt{C_1/L_1}$  интересующая нас математическая модель принимает вид

$$u_t = -v_x, \quad v_t = -u_x - \varepsilon v, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} + \beta_0 \sigma + \beta_1 \sigma^2 - \beta_2 \sigma^3 = 0,$$

где

$$\sigma = u|_{x=1} + \varepsilon \int_0^1 v(t, x) dx, \quad \varepsilon = l R_1 \sqrt{C_1/L_1},$$

$$\beta_0 = s_0 \alpha \sqrt{L_1/C_1}, \quad \beta_1 = -s_1 \alpha^2 \sqrt{L_1/C_1},$$

$$\beta_2 = s_2 \alpha^3 \sqrt{L_1/C_1}, \quad \alpha = M_2/L_1.$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий  $(u(x), v(x))$ ) краевой задачи (5) возьмем нелинейное многообразие  $\Sigma$  в гильбертовом пространстве  $W_2^1([0, 1]; R^2)$ , состоящее из вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют граничным условиям из (5). Напомним, что понятие фазового пространства позволяет обычным образом определять основные понятия математической теории колебаний. Отметим также, что единственность решения отвечающей (5) смешанной задачи с начальными условиями из  $\Sigma$  получается стандартно: достаточно линейную систему уравнений из (5) проинтегрировать по характеристикам, а затем результат подставить в указанные там же граничные условия.

2. Периодические по  $t$  решения краевой задачи (5) исследуем при дополнительных предположениях:

$$\beta_0 = \varepsilon/2 + \gamma \varepsilon^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad (6)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , а параметр  $\gamma > 0$  — величина порядка единицы. Первое из условий (6) обусловлено чисто математическими причинами (см. ниже). Допущение  $\beta_1 = 0$ , означающее симметричность нелинейной характеристики, сделано лишь для простоты, так как все полученные здесь результаты сохраняются и при  $\beta_1 \neq 0$ . Наконец, третье из равенств (6), а именно  $\beta_2 = 1$ , легко выполняется при введении подходящей нормировки переменных  $u$ ,  $v$ .

Подставляя в соотношения (5) равенства (6) и сохраняя во втором граничном условии из (5) только существенные для дальнейшего слагаемые, приходим к краевой задаче

$$u_t = -v_x, \quad v_t = -u_x - \varepsilon v,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

$$v|_{x=1} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma \varepsilon^2\right) u|_{x=1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 v dx - u^3|_{x=1} = 0.$$

Для построения периодических по  $t$  решений краевой задачи (7) воспользуемся методом бесконечномерной нормализации, представляющим собой специальный вариант асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского (см., напр., [4]) и смыкающимся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю.С. Колесова (см., напр., [5, 6]).

С этой целью подставим в краевую задачу (7) ряды

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} u_k(t, \tau, x), \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k(t, \tau, x), \quad (8)$$

где  $\tau = \varepsilon^2 t$ , все коэффициенты являются 4-периодическими по  $t$ ,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] \times (-1)^{n-1} \sin(\omega_n x),$$

$$v_0 = i \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) - \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] \times (-1)^{n-1} \cos(\omega_n x) \quad (9)$$

(где черта — знак комплексного сопряжения),  $\omega_n = \pi(2n - 1)/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а комплексные «амплитуды»  $z_n$  таковы, что сходится ряд с общим членом  $\omega_n^2 |z_n|^2$  (в этом случае  $u_0, v_0 \in W_2^1$  по переменной  $x$ ). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , последовательно определяем  $u_j, v_j, j = 1, 2$ , и неизвестные амплитуды  $z_n, n = 1, 2, \dots$ . Специально подчеркнем, что отыскание периодических решений краевой задачи (7) в виде (8) вполне естественно, так как формулы (9) (при фиксированном  $\tau$ ) задают произвольное периодическое решение линейной краевой задачи, получающейся из краевой задачи (7) при  $\varepsilon = 0$  после отбрасывания нелинейности.

На первом шаге описанного алгоритма приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_0,$$

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad v_1|_{x=1} + \frac{1}{2} u_0|_{x=1} = 0,$$

решение которой будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n A_n(x) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \bar{A}_n(x) \exp(-i\omega_n t)],$$

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n B_n(x) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \bar{B}_n(x) \exp(-i\omega_n t)].$$

На этом пути для  $A_n, B_n$  получаем линейные неоднородные краевые задачи, разрешимость которых обеспечивает слагаемое  $(\varepsilon/2)u|_{x=1}$  во втором граничном условии из (7). Таким образом, становятся понятны мотивы специального предположения в (6) относительно коэффициента усиления  $\beta_0$ . Несложный анализ только что упомянутых краевых задач приводит к равенствам

$$A_n = -\frac{i}{2} (-1)^{n-1} x \cos \omega_n x, \quad (10)$$

$$B_n = \frac{i}{\omega_n} [A'_n(x) + i(-1)^{n-1} \cos \omega_n x], \quad n = 1, 2, \dots$$

На втором шаге после исключения переменной  $v_2$  имеем дело с краевой задачей

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$u_2|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=1} = \frac{d}{dt} (\gamma u_0|_{x=1} - u_0^3|_{x=1}),$$

решение которой ищем в виде

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n(x) \exp(i\omega_n t) + \bar{C}_n(x) \exp(-i\omega_n t)].$$

Нетрудно проверить, что с учетом равенств (10) для определения функций  $C_n, n = 1, 2, \dots$ , получаются краевые задачи

$$C_n'' + \omega_n^2 C_n = (-1)^{n-1} \left( 2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau} \sin \omega_n x + \frac{\omega_n}{2} z_n x \cos \omega_n x \right),$$

$$C_n(0) = 0, \quad C'_n(0) = i\omega_n f_n, \quad (11)$$

где  $f_n$  — коэффициент при гармонике  $\exp(i\omega_n y)$  ряда Фурье функции  $\gamma w(\tau, y) - w^3(\tau, y)$ ,

$$w(\tau, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n y)]. \quad (12)$$

Условия разрешимости краевых задач (11) приводят в свою очередь к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\omega_n \dot{z}_n = -\frac{1}{8} z_n + i\omega_n f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

для отыскания неизвестных амплитуд  $z_n, n = 1, 2, \dots$ . Наконец, использование функции (12) «сворачивает» счетную систему уравнений (13) в краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial y} = -\frac{1}{8} w + (\gamma - 3w^2) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(\tau, y+2) \equiv -w(\tau, y). \quad (14)$$

Строгий смысл изложенным выше формальным построениям придается по той же схеме, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [4]). Именно: с помощью построенных отрезков рядов (8) конструируется замена переменных, приводящая исходную краевую задачу (7) с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$  к виду (13). Таким образом, система (13), а значит, и краевая задача (14) представляют собой «укороченную» нормальную форму задачи (7). Поэтому справедливо следующее стандартное

утверждение о соответствии между их периодическими решениями.

**Теорема 1.** Пусть краевая задача (14) имеет периодическое решение  $w = w_0(\xi)$ ,  $\xi = \sigma_0\tau + y$ , экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике  $W_2^1$ ). Тогда найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  в исходной краевой задаче (7) ему отвечает цикл (периодическое по  $t$  решение) той же устойчивости с асимптотикой (8). При этом в формулах (9) следует положить  $z_n(\tau) = w_n^0 \exp(i\omega_n \sigma_0 \tau)$ , где  $w_n^0, \bar{w}_n^0, n = 1, 2, \dots$  — коэффициенты Фурье функции  $w_0(\xi)$  по системе  $\exp(\pm i\omega_n \xi)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Следует подчеркнуть, что примененный метод представляет собой бесконечномерный аналог широко используемого в теории колебаний метода медленно меняющихся амплитуд (см., напр., [7, 8]). Специфика этого метода в нашем случае состоит также и в том, что он применяется к краевой задаче (7), нелинейность в которой не является малой.

3. Выполняя в краевой задаче (14) подходящие нормировки переменных  $w, \tau, y$  и заменяя  $\tau$  на  $t, y$  на  $x$ , приведем ее к более удобному для анализа виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = w + \lambda(1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x + 1) = -w(t, x), \quad (15)$$

где  $\lambda = 4\gamma > 0$ . Из теоремы 1 следует, что особый интерес представляют ее периодические решения типа бегущих волн:

$$w = \theta(y), \quad y = \sigma t - x, \quad \sigma > 0. \quad (16)$$

Их динамика по  $\lambda$  подробно изучена в работе [9]; поэтому мы приведем здесь лишь краткий обзор содержащихся в [9] результатов.

Подставляя представление (16) в краевую задачу (15), для нахождения функции  $\theta(y)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое после замены  $y/\sqrt{\sigma} \rightarrow y$  принимает вид

$$\theta'' + r(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0, \quad (17)$$

где  $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$ . Заметим, что (17) — это классическое уравнение Ван дер Поля, имеющее при всех  $r > 0$  единственное периодическое решение  $\theta = H(y, r)$ ,  $H(y, 0) = 2 \cos y$  с периодом  $T = T(r)$ ,  $T(0) = 2\pi$ , удовлетворяющее также равенству  $H(y + T/2, r) \equiv -H(y, r)$ . Однако в силу того, что фигурирующая в (16) функция  $\theta(y)$  2-периодична, нас интересует решение уравнения (17) с периодом  $2/\sqrt{\sigma}$ . Поэтому для определения неизвестного параметра  $r$  получаем уравнение

$$\lambda T(r) - 2r = 0. \quad (18)$$

При  $\lambda \ll 1$ , применяя к уравнению (18) в точке  $\lambda = 0, r = 0$  теорему о неявной функции, однозначно определяем его решение  $r = r_0(\lambda)$ ,  $r_0(0) = 0$ . Вспоминая далее о связи уравнения (17) с исходной за-

дачей (15), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$w = \theta_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x, \quad (19)$$

где  $\sigma_0(\lambda) = (\lambda/r_0(\lambda))^2$ ,  $\theta_0(y, \lambda) = H(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda))$ . Отметим также, что наряду с решением (19) у краевой задачи (15) при  $\lambda \ll 1$  существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного с помощью принципа подобия:

$$w = \theta_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где  $\theta_n = \theta_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda)$ ,  $\sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2$ .

**Теорема 2.** Для любого натурального  $N$  можно указать такое достаточно малое  $\lambda_N > 0$ , что при всех  $0 < \lambda \leq \lambda_N$  краевая задача (15) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения (20) с номерами  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Обратим внимание, что найденные решения краевой задачи (15) в форме волн стационарного профиля, описываемых уравнением Ван дер Поля, с физической точки зрения близки к автосолитонам, наблюдаемым, например, в кольцевом лазере в случае самосинхронизации мод (см. [8]). При такой интерпретации уравнение (18) представляет собой аналог нелинейного дисперсионного соотношения. Отметим еще, что в нашем случае «основной» период колебаний, т.е. период функции  $\theta_0(y, \lambda)$ , равен 2, а все функции  $\theta_n(y, \lambda)$ ,  $n \geq 1$ , в силу принципа подобия имеют периоды  $2/(2n+1)$ . Отсюда с учетом теоремы 1 заключаем, что отвечающие решениям (20) периодические по  $t$  решения  $(u_n(t, x, \varepsilon), v_n(t, x, \varepsilon))$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , исходной краевой задачи (7) имеют периоды  $T_n(\varepsilon) = 4/(2n+1) + O(\varepsilon^2)$ .

В дополнение к теореме 2 отметим, что каждое периодическое решение (20) непрерывно продолжается по параметру  $\lambda$  на интервал  $0 < \lambda < \lambda_n$ ,  $\lambda_n = \lambda_0/(2n+1)$ ,  $\lambda_0 = 2/(3-2 \ln 2)$ , а при  $\lambda \geq \lambda_n$  становится разрывным. С физической точки зрения это вполне понятно: увеличение энергетического параметра  $\lambda$  в совокупности с эффектом синхронизации мод приводит сначала к усложнению формы каждого цикла (20), а затем (при  $\lambda \geq \lambda_n$ ) к полному его разрушению.

Из теорем 1 и 2 следует, что исходная краевая задача (7) при подходящем уменьшении параметров  $\varepsilon, \gamma$  может иметь любое фиксированное число устойчивых циклов. Данное свойство, называемое в ряде работ буферностью, представляет собой характерную особенность динамики широкого класса автогенераторов с  $RLCG$ -распределенными параметрами.

На принципиальную возможность существования сразу нескольких устойчивых циклов в классическом автогенераторе, содержащем отрезок длинной линии, указывал еще А. А. Витт (см. [10, 11]). Однако в полном объеме феномен буферности как таковой открыт не был. Видимо, впервые увеличение числа возможных автоколебательных режимов при изменении параметров автогенератора было замечено физиками экспериментально (см. [12]). Математическое же исследование буферности началось по инициативе

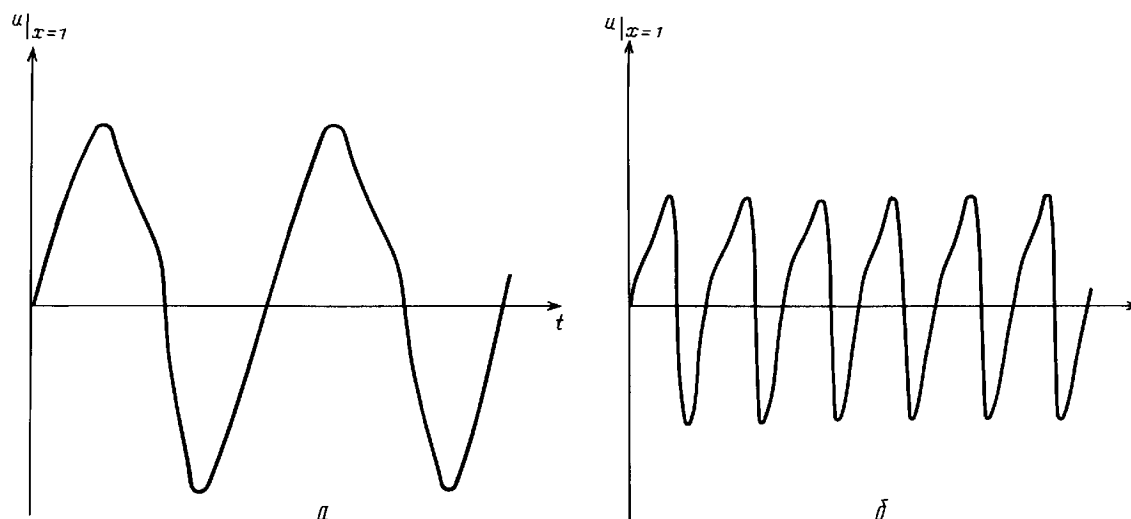


Рис. 2

Ю. С. Колесова, который численными методами изучал это явление в параболических системах типа реакция-диффузия [13], а затем исследовал его чисто теоретически в гиперболических уравнениях [14].

Укажем, что явление буферности подробно изучалось — как теоретически, так и экспериментально — в целом ряде различных задач (см., напр., [2, 9, 15, 16]). Подчеркнем, что аналогичные генераторы на сосредоточенных элементах, как правило, этим свойством не обладают.

4. Для проверки полученных теоретических результатов был собран АРП, (см. блок-схему на рис. 1, а). Основная линия была выполнена в виде прямого соленоида длиной  $l_1 = 0,429$  м с диаметром  $d = 0,048$  м. При этом общая длина  $l_2$  намотанного проводника (с диаметром  $\Delta = 0,00016$  м) составляла 404,32 м. Вспомогательная линия также представляла собой соленоид с геометрическими характеристиками  $l_1 = 0,417$  м,  $d = 0,054$  м,  $l_2 = 176,86$  м,  $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м, осью которого является основная линия. Суммарные значения распределенной индуктивности, емкости и сопротивления каждой линии составили  $L_1 = 55,2$  мГн,  $L_2 = 1,2$  мГн,  $C_1 = 87,7$  пФ,  $C_2 = 0$ ,  $R_1 = 540$  Ом,  $R_2 = 17$  Ом.

Широкополосный усилитель с входным и выходным активными сопротивлениями 50 МОм и 75 Ом имел равномерный коэффициент усиления в диапазоне частот от 100 кГц до 120 МГц, т. е. по своим характеристикам был близок к идеальному (его принципиальная схема приведена в работе [15]). Автоколебания, реализующиеся в генераторе, снимались с выхода усилителя и наблюдались на экране осциллографа.

При изменении коэффициента усиления в некотором диапазоне было обнаружено два сосуществующих периодических режима, реализация каждого из которых зависела (при фиксированных прочих параметрах) только от задания подходящих начальных условий для тока и напряжения. Для первого из них (см. рис. 2, а) амплитуда  $A_1 = 0,75$  В, период  $T_1 = 9$  мкс, а для второго (см. рис. 2, б)  $A_2 = 0,45$  В,

$T_2 = 3$  мкс. Отношение их периодов равно 1:3, что позволяло отождествить их с циклами краевой задачи (7), отвечающими бегущим волнам (20) с номерами  $n = 0$  и  $n = 1$ .

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Ф. Марченко, замечания и советы которого существенно содействовали улучшению содержания статьи и ясности изложения материала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00207).

#### Литература

1. Камбулов В. Ф. // ДАН СССР. 1994. 334, № 5. С. 569.
2. Камбулов В. Ф. // Радиотехн. и электроника. 1997. 42, № 9. С. 1121.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1959.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
5. Колесов Ю. С. // Матем. сб. 1993. 184, № 3. С. 121.
6. Колесов Ю. С. // Там же. 1995. 186, № 10. С. 57.
7. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М., 1988.
8. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М., 1997.
9. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. // Матем. моделирование. 1996. 8, № 1. С. 93.
10. Витт А. А. // Журн. техн. физ. 1934. 4, № 1. С. 144.
11. Витт А. А. // Там же. 1936. 6, № 9. С. 1459.
12. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. // Радиотехн. и электроника. 1956. 1, № 4. С. 126.
13. Захаров А. А., Колесов Ю. С. // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 3.
14. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. // ДАН СССР. 1990. 315, № 2. С. 281.
15. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. // Радиотехн. и электроника. 1997. 43, № 8. С. 1019.
16. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. // Дифф. уравнения. 1997. 33, № 5. С. 638.

Поступила в редакцию  
13.04.98