АСТРОНОМИЯ

УДК 519.246,524

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРА–АНАЛОГ В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ И ДОСТОВЕРНОСТЬ КОРРЕЛЯЦИИ С АСТРОФИЗИЧЕСКИМИ СОБЫТИЯМИ

А. В. Гусев

(*ГАИШ*)

Показано, что при интерпретации эффекта корреляции «гравитационных» импульсов с космическими событиями необходимо учитывать погрешность восстановления исходных континуальных выходных сигналов гравитационных антенн, заданных в цифровой форме, по экспериментальным данным.

1. Физическая причина эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции [1], которая была обнаружена при анализе выходных сигналов пространственно разнесенных гравитационных антенн с «геофизическим» уровнем чувствительности в период вспышки сверхновой СН 1987А, остается до конца не выясненной. В работе [2] сделана попытка рассматривать подобный эффект как следствие аномальных ошибок [3]. Аномальные ошибки возникают в методе максимального правдоподобия при большой длительности априорного интервала возможных значений неизвестного временного сдвига между «гравитационными» и нейтринными событиями. Это позволяет увеличить вероятность ложной тревоги с заявленной величины $\alpha \approx 10^{-6}$ до величины $\alpha_a \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ (оценка α_a получена путем повторения алгоритмов обработки, использованных в реальном эксперименте, при компьютерной симуляции входных данных). Несмотря на то что сам эффект не согласуется с современными астрофизическими представлениями, подобная оценка вероятности ложной тревоги, учитывающая только аномальные ошибки, остается достаточно малой. Ее дальнейшее снижение в работе [2] связано с чисто эвристическим предположением о произвольном выборе двухчасового интервала наблюдения (полная длительность реализации выходного сигнала составляла приблизительно 36 ч). По сравнению с принципиальным выводом о необходимости рассматривать при интерпретации экспериментальных результатов аномальные ошибки последний аргумент не представляется столь же существенным, так как в реальном эксперименте интервал наблюдения выбирается таким образом, чтобы он содержал нейтринные события, относящиеся к СН 1987А.

Другим источником неустранимых ошибок, который необходимо учитывать при анализе достоверности эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции, является процесс восстановления исходных континуальных (непрерывных) выходных сигналов гравитационных антенн по дискретным отсчетам с шагом дискретизации $\Delta t \approx 1$ с, равным времени корреляции тепловых шумов обеих установок [4]. При таком выборе шага дискретизации отдельные отсчеты оказываются статистически независимыми случайными величинами, распределенными (при отсутствии внешнего воздействия) приблизительно по экспоненциальному закону с заданными эффективными шумовыми температурами $T_1 \approx 28{,}6$ К и $T_2 \approx 22{,}1$ К. Информация о поведении системы между последовательными дискретными отсчетами оказывается полностью потерянной. Реальных попыток учесть статистический характер восстановления континуальных сигналов по цифровому прототипу, по-видимому, не было.

Необходимость предварительной интерполяции и восстановления исходных непрерывных сигналов вытекает из основных принципов оценочно-корреляционного приема стохастических сигналов [5]. В состав оптимального приемного устройства входит блок оценки, обеспечивающий минимальную среднеквадратичную ошибку фильтрации сообщения. В рассматриваемом случае «гравитационных» данных, заданных в цифровой форме в виде дискретной последовательности с независимыми элементами, оптимальное восстановление исходных континуальных выходных сигналов гравитационных антенн требует в общем случае нелинейного алгоритма реконструкции. Более простыми для реализации оказываются алгоритмы линейного восстановления «гравитационных» сигналов [4]. Частным случаем подобного алгоритма является округление [1] экспериментальных данных, использованное при анализе эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции. Погрешность такого метода по сравнению с оптимальной линейной фильтрацией [4] значительно возрастает.

Целью настоящей работы является анализ достоверности эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции в период вспышки сверхновой СН 1987А, основанный на применении известных в статистической радиотехнике результатов, относящихся к распределению абсолютного максимума стационарного случайного процесса [6], а также на учете неизбежной (неконтролируемой) ошибки процесса линейного восстановления континуальных выходных сигналов гравитационных антенн.

2. Пусть

$$\tau_i = t_i + \tau \tag{1}$$

— моменты возникновения «гравитационных» импульсов.

В выражении (1) t_i — моменты возникновения нейтринных событий, $i = \overline{1, N}$; N — число таких событий на интервале наблюдения $(0, T)$; τ — неизвестный временной сдвиг, возможные значения которого ограничены априорным интервалом $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$.

Условие (правило) обнаружения некогерентной последовательности «гравитационных» импульсов можно представить в виде [5]

$$\max_{\tau} Z(\tau) \geqslant Z_\alpha. \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{gathered} Z(\tau) = Z_1(\tau) + Z_2(\tau), \\ Z_k(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_k(\tau_i), \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{3}$$

Z_α — пороговый уровень, определяемый вероятностью ложной тревоги α:

$$P\left\{\max_{\tau} Z(\tau) \geqslant Z_\alpha \Big| \lambda = 0\right\} = \alpha. \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) $E_1(t)$ и $E_2(t)$ — выходные сигналы гравитационных антенн, расположенных в Риме и Мэриленде; λ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения два возможных значения: $\lambda = 0$ при отсутствии «гравитационных» импульсов и $\lambda = 1$ при их присутствии.

При дальнейшем анализе будем предполагать, что последовательность $\{t_i\}$ моментов возникновения нейтринных импульсов представляет собой пуассоновский поток [7] «редких» событий, $N(\Delta t/T) \ll 1$, для которого моменты появления отдельных импульсов считаются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале наблюдения $(0, T)$.

Среднее значение $\overline{Z}$ и функция корреляции $B(\delta)$ стационарного случайного процесса $Z_0(\tau) = Z(\tau|\lambda = 0)$ определяются следующими формулами:

$$\overline{Z} = (T_1 + T_2), \quad B(\delta) = B_1(\delta) + B_2(\delta). \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_k(\delta) = \frac{1}{N}\Bigg\{ & B_{ek}(\delta) + \frac{N-1}{\pi} \times \\ & \times \int_0^\infty W_{ek}(\omega) \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2} \cos \omega\delta \, d\omega \Bigg\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $B_{ek}(\delta) = T_k^2 \rho^2(\delta)$ — функция корреляции стационарного случайного процесса $E_k(t|\lambda = 0)$, $k = 1, 2$,

$$\rho(\delta) = \begin{cases} 1 - (|\delta|/\Delta t), & |\delta| \leqslant \Delta t, \\ 0, & |\delta| > \Delta t, \end{cases} \tag{7}$$

$$W_{ek}(\omega) \leftrightarrow B_k(\delta).$$

Полагая в выражении (6) $\delta = 0$, находим дисперсию σ^2 случайного процесса $Z_0(\tau)$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 & \approx \frac{1}{N}\left(T_1^2 + T_2^2\right)\left\{1 + \frac{2}{3}(N-1)(\Delta t/T)\right\} \approx \\ & \approx \frac{1}{N}\left(T_1^2 + T_2^2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

При $N \gg 1$ случайный процесс $Z_0(\tau)$ можно рассматривать как асимптотически гауссовский [8]. Наибольшее значение $Z_m = \max\limits_{\tau} Z_0(\tau)$ реализации этого процесса на априорном интервале $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$ возможных значений неизвестного параметра τ определяется формулой Г. Крамера [6]

$$Z_m = \overline{Z} + \sigma\left(\sqrt{2\ln\mu} + \frac{\xi}{\sqrt{2\ln\mu}}\right). \tag{9}$$

В выражении (9) использованы следующие обозначения:

$$\mu = \frac{(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{2\pi}\sqrt{-R''(0)}, \tag{10}$$

ξ — случайная величина, распределенная по закону

$$P\{\xi \leqslant x\} = \exp\left\{-\mathrm{e}^{-x}\right\}, \tag{11}$$

$R(\delta) = B(\delta)/B(0)$.

Принимая во внимание выражения (6), (7) и (10), находим

$$\sqrt{-R''(0)} \approx \sqrt{(\nu\Delta t)^2 + (2/T^2)} \approx (\nu/\Delta t), \tag{12}$$

где $\nu = \sqrt{\Omega\Delta t} \geqslant 1$, Ω — полоса пропускания сглаживающего фильтра.

Подстановка выражений (10), (11) и (12) в формулу (9) приводит к следующей оценке порогового уровня Z_α:

$$Z_\alpha \approx (T_1 + T_2) + \sqrt{\frac{1}{N}\left(T_1^2 + T_2^2\right)}\left[\sqrt{2\ln\mu} + \frac{\ln(1/\alpha)}{\sqrt{2\ln\mu}}\right], \tag{12}$$

где

$$\mu \approx \frac{(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{\Delta t}.$$

3. Априорный диапазон $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$ возможных значений неизвестного временного сдвига τ между моментами возникновения «гравитационных» и «негравитационных» (астрофизических) событий при

фиксированном интервале наблюдения $(0, T)$ можно определить следующим образом:

$$t_1 + \tau_{\min} = t_0, \qquad t_N + \tau_{\max} = t_0 + T.$$

Предполагая по-прежнему, что моменты нейтринных событий можно рассматривать как стационарный пуассоновский поток, имеем

$$(\tau_{\max} - \tau_{\min}) \approx \theta, \quad \theta \approx T/N$$

— среднее расстояние (пауза) между «гравитационными» импульсами.

В эксперименте по поиску «гравитационно-нейтринной» корреляции [1] длительность подынтервала, на который приходится вспышка сверхновой СН 1987А, выбиралась равной $T = 7200$ с. Общее число нейтринных событий на этом подынтервале оказалось равным $N = 96$. При выбранных шумовых характеристиках гравитационных антенн [1] $T_1 \approx 28{,}6$ K и $T_2 \approx 22{,}1$ K, шаге дискретизации $\Delta t = 1$ с и фиксированной длительности $\theta \approx (7200/96) \approx 75$ с априорного интервала возможных значений неизвестного параметра τ, вероятности ложной тревоги $\alpha \approx 10^{-2}$ с учетом выражения (12) получим $Z_{0{,}01} \approx 68{,}28$ K.

В то же время полученная непосредственно по реальным интерполированным кривым оценка наибольшего значения реализации случайного процесса $Z(\tau)$, определяемого выражением (3), составляет [1] $\left(\max\limits_{\tau} Z(\tau)\right)_{ps} \approx 72{,}3$ K, что превышает пороговый уровень $Z_{0{,}01}$ на величину

$$\Delta_Z = \left(\max_{\tau} Z(\tau)\right)_{ps} - Z_{0{,}01} \approx 4{,}02 \text{ K}.$$

Таким образом, без учета статистической ошибки восстановления исходных континуальных выходных сигналов гравитационных антенн в соответствии с условием (правилом) обнаружения (2) «нулевая» гипотеза $\lambda = 0$ должна быть отклонена с достоверностью $P_0 = 1 - \alpha \geqslant 0{,}99$, что полностью согласуется с результатами компьютерной симуляции [2].

4. Принципиально неустранимым источником дополнительных помех, который необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных результатов, является сам процесс восстановления непрерывных выходных сигналов гравитационных антенн по дискретным отсчетам при неоптимальном (в смысле теоремы Котельникова) выборе шага дискретизации $\Delta t \approx 1$ с. Ошибка (погрешность) $\chi(\tau)$, возникающая при линейном восстановлении, определяется следующим выражением:

$$\chi(\tau) = Z(\tau) - \hat{Z}(\tau) = \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau),$$

$$\hat{Z}(\tau) = \hat{Z}_1(\tau) + \hat{Z}_2(\tau),$$

$$\hat{Z}_k(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{E}_k(\tau_i), \quad \chi_k(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k(\tau_i),$$

где $\hat{E}_k(t)$ — оптимальная линейная оценка исходного непрерывного (аналогового) выходного сигнала $E(t)$, $\varepsilon_k(t) = E_k(t) - \widehat{E}_k(t)$, $k = 1, 2$.

В безразмерном времени

$$t' = (t/\Delta t) = n(t) + x(t), \quad n(t) = [t/\Delta t],$$

$$0 \leqslant x(t) = (t/\Delta t) - n(t) \leqslant 1,$$

где $[a]$ — целая часть действительного числа a, имеем [4]

$$\hat{E}_k(n+x) = a_1(x)\, E_k(n) + a_2(x)\, E_{k+1}(n+1) + a_3(x)\, \overline{E},$$

$$\overline{E}_k = \langle E_k \rangle = T_k, \tag{13}$$

где $\langle \ldots \rangle$ — символическая запись оператора статистического усреднения, $k = 1, 2$.

Весовые функции $a_1(x), a_2(x)$ и $a_3(x)$ при оптимальном линейном оценивании определяются из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\langle \varepsilon_k^2(x) \rangle = \left\langle \left\{ E_k(n+x) - \hat{E}_k(n+x) \right\}^2 \right\rangle.$$

Ограничиваясь несмещенными оценками, находим [4]

$$a_3(x) = 1 - a_2(x) - a_3(x).$$

При обработке реальных экспериментальных данных вместо оптимального линейного оценивания использовалось непосредственное «округление» экспериментальных данных до ближайшего дискретного отсчета. Весовые функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ при такой интерполяции определяются следующими формулами:

$$a_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$a_2(x) = 1 - a_1(x), \qquad a_3(x) = 0.$$

Среднеквадратическая ошибка восстановления исходного аналогового сигнала $E_k(n+x)$ при непосредственном округлении экспериментальных данных оказывается равной [4]

$$\langle \varepsilon_k^2(x|\lambda=0) \rangle = 2T_k^2 \times \begin{cases} x(x-2), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 - x^2, & \text{если } 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{15}$$

Принимая во внимание выражения (13), (14) и (15), а также пренебрегая вероятностью взаимного перекрытия отдельных «гравитационных» импульсов, имеем

$$\langle \chi^2(\tau|\lambda=0) \rangle = \langle \chi_1^2(\tau|\lambda=0) \rangle + \langle \chi_2^2(\tau|\lambda=0) \rangle,$$

$$\langle \chi_k^2(\tau|\lambda=0) \rangle = \frac{1}{N^2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \langle \varepsilon_k(n_i+x_i)\, \varepsilon_j(n_j+x_j)\, |\lambda=0 \rangle \approx$$

$$\approx \frac{1}{N}\overline{\left\langle \varepsilon_k^2 \left(x|\lambda=0\right)\right\rangle} \approx \frac{1{,}52}{N}T_k^2,$$

$$\overline{\left\langle \varepsilon_k^2 \left(x|\lambda=0\right)\right\rangle} = \int\limits_0^1 \left\langle \varepsilon_k^2 \left(x|\lambda=0\right)\right\rangle dx, \quad k=1,2.$$

Для использованных шумовых температур T_1 и T_2 (см. выше) и $N=96$ получим

$$\sqrt{\overline{\left\langle \varepsilon_Z^2 \left(x|\lambda=0\right)\right\rangle}} \approx 4{,}62 \text{ K} > \Delta_Z,$$

где $\Delta_Z \approx 4{,}02$ K — превышение наибольшей величины реализации случайного процесса $\hat{Z}(\tau)$, построенной по интерполированным кривым, над пороговым уровнем $Z_{0,01}$.

Таким образом, достаточно малое $\alpha = \alpha_a \approx \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ значение вероятности ложной тревоги, которое сохраняется даже после учета аномальных ошибок при максимально-правдоподобной оценке неизвестного параметра τ, по-видимому, объясняется не произвольным выбором интервала наблюдения (t_0, t_0+T), как это предполагается в работе [2], а погрешностью реконструкции исходных выходных сигналов гравитационных антенн по дискретным отсчетам. Статистические результаты и выводы, полученные непосредственно по восстановленным кривым $\hat{E}_k(n+x)$, могут существенно отличаться от «истинных», соответствующих исходным континуальным (непрерывным) выходным процессам гравитационных антенн. Физическая причина подобного эффекта состоит в потере информации о поведении системы при нулевой гипотезе $\lambda=0$ между дискретными отсчетами. Даже при использовании алгоритма оптимальной линейной фильтрации [4] относительная ошибка восстановления составляет величину порядка 60%. Округление экспериментальных данных неизбежно приводит к еще большей ошибке восстановления, что и является основной причиной аномально высокой достоверности «гравитационно-нейтринной» корреляции, наблюдавшейся в эксперименте. Достоверность эффекта $P_0 = 1-\alpha$, учитывающая погрешности процесса интерполяции, ограничена «разумной» величиной $P_0 \leqslant 0,9 \div 0,95$. Необходимость привлечения «новой физики» [2] для интерпретации эффекта не возникает.

В заключение отметим, что простое повторение [2] алгоритмов обработки, использованных для анализа экспериментальных данных, при компьютерной симуляции не позволило количественно оценить влияние процедуры округления. В частности, при компьютерном моделировании учитывались только шумовые температуры T_1 и T_2 гравитационных антенн, а коэффициент корреляции $\rho(\delta)$ не принимался во внимание.

Литература

1. *Aglietta M., Castellina A., Fulgione W.* et al. // Nuovo Cimento. 1991. **C14**. P. 171.
2. *Dickson C.A., Schutz B.F.* // Phys. Rev. 1995. **D51**, No. 6. P. 2644.
3. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978.
4. *Гусев А.В.* // Метрология. 1998. **8**. С. 3.
5. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
6. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М., 1970.
7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М., 1982.
8. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1994.

Поступила в редакцию
27.04.98