УДК 519.713; 519.711:53

# О ЗАДАЧЕ ОПЕРАТИВНОГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ЭЛЕКТРОННЫХ МИКРОСХЕМ

**Б. И. Волков, Е. Б. Постников, Ю. П. Пытьев**

(*кафедра компьютерных методов физики*)

**Методом математического моделирования на основе теории измерительно-вычислительных систем решена задача эффективного размещения датчиков для контроля температуры в мощных микросхемах.**

## Введение

При эксплуатации электронных микросхем, в состав которых входят силовые элементы, выделяющие большое количество тепла, может происходить перегрев микросхемы в отдельных точках, приводящий к выходу из строя тех или иных элементов. Для оперативного контроля возможности перегрева необходимо в каждый момент времени $t \in [0, T]$ знать температуру любой точки схемы. На практике в некоторых точках схемы могут помещаться датчики, непрерывно измеряющие температуру. Поэтому возникает задача восстановления температуры в каждой точке микросхемы в любой момент времени $t \in [0, T]$ по результатам измерений температуры в отдельных точках до момента $t$ включительно. Цель данного исследования — выбор точек размещения датчиков, обеспечивающий наибольшую точность восстановления распределения температуры.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим модельную задачу, в которой подложка с расположенными на ней элементами имеет вид тонкой прямоугольной пластины $D$ с размерами $X \times Y \times Z$ (толщина $Z$ намного меньше $X$, так что по оси $Z$ температура одна и та же). Распределение температуры $v(x,t)$ на пластине описывается решением краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Для простоты рассмотрим одномерную модель: $D$ — отрезок $[0, L]$. Пусть начальная температура пластины и температура окружающей среды равны нулю. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - q(x)v(x,t) + f(x,t), \\ \hfill x \in (0, L), \\ \left.\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a^2(x)$ — коэффициент температуропроводности, $q(x) = h(x)/[c(x)\rho(x)]$, $f(x,t) = F(x,t)/[c(x)\rho(x)]$, $h(x)$ — коэффициент теплообмена с окружающей средой, $c(x)$ — удельная теплоемкость и $\rho(x)$ — плотность материала подложки, $F(x,t)$ — плотность тепловых источников.

Предположим, что область $D$ представляет собой объединение двух областей: $D_1$ и $D_2$, где $D_2 = [l, L]$ — область, в которой находятся тепловыделяющие элементы, $D_1 = [0, l]$ — остальная область. Будем считать, что функция $f(x,t)$, описывающая влияние тепловых источников, отлична от нуля только внутри $D_2$, причем там она зависит только от $t$, а коэффициенты $a_2$ и $q$ постоянны в пределах $D_1$ и $D_2$ и терпят разрыв на их границе.

При заданной функции $f$ решение краевой задачи (1) можно записать с помощью функции Грина $G$:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t \left\{ \int_l^L G(x, x', t-\tau)\, dx' \right\} f(\tau)\, d\tau \equiv \\ &\equiv \int_0^t \widetilde{G}(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{2}$$

для определения которой в каждой из областей $D_1$ и $D_2$ ставится задача (1) с постоянными коэффициентами, а на границе $x = l$ выполняются условия сопряжения — непрерывность по $x$ температуры $v(x,t)$ и теплового потока $k(x)\partial v(x,t)/\partial x$, где $k(x) = c(x)\rho(x)a^2(x)$ — коэффициент теплопроводности. (В формуле (2) выражение в фигурных скобках обозначено как $\widetilde{G}$.)

Выражение для $G$ записывается в виде бесконечного ряда по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами. Аналитическое решение этой задачи было найдено для представляющего практический интерес случая $q_2 > q_1$.

## 2. Редукция измерений

Математическая модель линейной схемы измерений имеет вид

$$\xi = Af + \nu, \tag{3}$$

где $\xi \in \mathcal{R}$ — искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}$ выходной сигнал прибора $A$, на вход которого поступил сигнал $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ ($\mathcal{R}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$ — евклидовы пространства). Пусть $f$ — априори произвольный вектор пространства $\widetilde{\mathcal{R}}$, $\nu$ — случайный вектор пространства $\mathcal{R}$ с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu = 0$ и заданы линейные операторы: $A$ и $\Sigma$ — корреляционный оператор случайного вектора $\nu$ (задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерений (3) [1]). В задаче редукции измерения (3) задан линейный оператор $U$, определяющий представляющие интерес параметры $Uf$ сигнала $f$, и требуется определить линейный оператор $R$ так, чтобы $R\xi$ можно было интерпретировать как наиболее точную в среднем квадратичном (с.к.) версию $Uf$ для произвольного сигнала $f$. В нашем случае задача редукции разрешима, а с.к. погрешность равна [1]

$$h(R,U)=\min_{R}\sup_{f\in\widetilde{\mathcal{R}}} E||R\xi-Uf||^2=\operatorname{tr}U(A^*\Sigma^{-1}A)^-U^*.$$

В рассматриваемом случае $\xi$ представляет температуру в точке $x_d$, искаженную шумом измерений $\nu$; $f$ — влияние тепловых источников, $A$ — интегральный оператор с ядром $\widetilde{G}(x_d,t-\tau)$. Интересующая нас температура в некоторой точке $x_0$ может быть интерпретирована как сигнал на выходе прибора $U$, если $U$ — интегральный оператор с ядром $\widetilde{G}(x_0,t-\tau)$.

Для проведения численных экспериментов были рассмотрены два временных режима: непрерывный с произвольной зависимостью $f(\tau)$ от времени и режим с переключением, когда $f(\tau)=f_1$, если $\tau\in(0,T_f)$, и $f(\tau)=f_2$, если $\tau\in(T_f,T)$. В дискретном варианте функция $f(\tau)$ приближалась кусочно-постоянной функцией, а функции $v(x,t)$ и $\nu(x,t)$ для фиксированного $x$ задавались своими значениями в узлах равномерной сетки по $t$.

### 3. Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте по данным измерений температуры в точке $x_d$ за период $[T_{d1},T]$, где $T_{d1}>0$, были вычислены $h_T$ и $<h_{(0,T]}>$ — погрешность восстановления температуры в точке $x_0$ в момент времени $T$ и средняя погрешность в точке $x_0$ за весь период от 0 до $T$. Получены зависимости этих величин от $x_d$ при различных фиксированных значениях $x_0$. Во всех расчетах полагалось $\Sigma=I$, $a_1=a_2=5$, $k_1=k_2$ (все величины даны в безразмерных единицах). Напомним, что тепловые источники находятся лишь в области $D_2=[l,L]$.

Результаты численных расчетов следующие:

1) если измерения проводить начиная с момента времени, близкого к $t=0$, то при любых значениях $q_1$ и $q_2$ и для любой точки $x_0$ минимум погрешностей $h_T(x_d)$ и $h_{(0,T]}(x_d)$ достигается в области $D_2$;

2) если температура измеряется не с момента $t=0$, то при достаточно большой разности $q_2-q_1$ минимум $h_T(x_d)$ достигается вне области $D_2$, если $x_0$ находится вне области $D_2$ (подобная картина наблюдается и для режима с переключением — рис. 1 и для непрерывного режима — рис. 2), а минимум $h_{(0,T]}(x_d)$ для режима с переключением достигается вне области $D_2$ для любых $x_0$ (рис. 3). Для непрерывного режима $<h_{(0,T]}>$ намного больше единицы (даже при $q_1=q_2=0$).

Таким образом, если имеется возможность проводить измерения начиная с $t=0$, то при любых значениях $q_1$ и $q_2$ оптимальной областью расположения датчиков является область с источниками тепла.

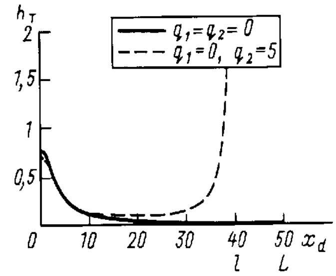


*Рис. 1.* Зависимости $h_T(x_d)$ (при $x_0=0$). Режим с переключением, $T_f=T/2=5$. Измерения проводились с момента времени $T_{d1}=7$ до $T=10$ с шагом $\Delta t=0{,}5$

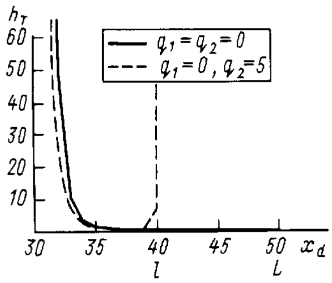


*Рис. 2.* Зависимости $h_T(x_d)$ (при $x_0=35$) для задачи с непрерывным режимом (количество шагов по $\tau$ равно 17). Измерения проводились с момента времени $T_{d1}=1{,}1$ до $T=10$ с шагом $\Delta t=0{,}445$

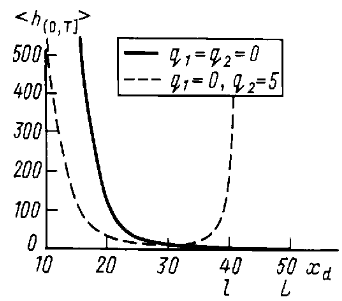


*Рис. 3.* Зависимости $<h_{(0,T]}>(x_d)$ (при $x_0=50$; восстановление проводилось с момента времени $\tilde{t}=0{,}5$ до $\tilde{t}=T$ с шагом $\Delta\tilde{t}=0{,}95$). Режим с переключением, $T_f=T/2=5$. Измерения проводились с момента времени $T_{d1}=7$ до $T=10$ с шагом $\Delta t=0{,}5$

Если же измерения могут проводиться только начиная с некоторого момента $T_{d1}>0$, то при достаточно большом значении $q_2-q_1$ оптимальной является определенная область микросхемы вне источников (за исключением случая, когда нас интересует температура области с источниками только в момент проведения последнего измерения).

**Литература**

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.

Поступила в редакцию
17.02.99