ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

О СООТВЕТСТВИИ КВАНТОВОГО И КЛАССИЧЕСКОГО ОПИСАНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

А. Е. Лобанов, О. С. Павлова

(*кафедра теоретической физики*)

Построен оператор, позволяющий включить в решение уравнения Дирака взаимодействие аномального магнитного момента нейтральной частицы с электромагнитными полями, для которых уравнение Баргмана–Мишеля–Телегди дает точное описание эволюции спина.

Для исследования поведения спина релятивистской частицы при ее движении во внешних электромагнитных полях, как правило, используется либо описание состояния частицы через решения уравнения Дирака [1], либо классическое описание эволюции спина, основанное на уравнении Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [2]. При этом предполагается, что уравнение БМТ дает лишь приближенную картину поведения спина [3, 4]. Известно много полей, для которых можно построить точные решения уравнения Дирака [5, 6]. Наша цель — отобрать лишь те поля, для которых уравнение БМТ является точным. Критерием такого отбора может служить требование, чтобы решение уравнения БМТ совпадало с плотностью аксиального тока, построенной на решениях уравнения Дирака, а решения уравнения Лоренца — с плотностью векторного тока.

В настоящей работе эта проблема исследуется для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом μ_0 (АММ). В этом случае уравнение Дирака в полях, заданных тензором $F^{\mu\nu}$, записывается так:

$$(i\hat{\partial} - i\frac{\mu_0}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - m)\Psi = 0, \tag{1}$$

а уравнения Лоренца и БМТ соответственно

$$du^\mu/d\tau = 0, \tag{2}$$

$$dS^\mu/d\tau = 2\mu_0 F^{\mu\nu}S_\nu + 2\mu_0 u^\mu F^{\alpha\beta}u_\beta S_\alpha, \tag{3}$$

где τ — собственное время (здесь используются обозначения книги [1] и $c = \hbar = 1$). Следует заметить, что для четырехмерных векторов спина S^μ и скорости u^μ имеют место дополнительные условия $(Su) = 0$, $(uu) = 1$, $(SS) = -1$.

В дальнейшем сделаем замену $\mu_0 F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu}$. Известно, что слагаемое, включающее взаимодействие АММ с электромагнитным полем, можно записать так:

$$-\frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \to \mathbf{\Sigma H} - i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}.$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей в лабораторной системе, а $\mathbf{\Sigma}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ — четырехрядные матрицы, определенные стандартным образом [1].

Учитывая, что в нашем случае решение уравнения Лоренца имеет вид $u^\mu = \mathrm{const}$, запишем уравнения Дирака через величины в системе покоя частицы, переход в которую осуществляется при помощи постоянного оператора $L^{\mu\nu}$:

$$L^{\mu\nu}u_\nu = u^\mu_R, \quad u^\mu_R = (1,0,0,0).$$

При этом

$$-(i/2)F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad \to \quad \left(\mathbf{H}_0 + i\gamma^5\mathbf{E}_0\right)\mathbf{W},$$

$$i\hat{\partial} \quad \to \quad i\left(\hat{\Lambda}_0\partial'_0 - \hat{\mathbf{\Lambda}}\boldsymbol{\partial}'\right).$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — напряженности электрического и магнитного полей в системе покоя,

$$W_i = -\gamma^5\hat{\Lambda}_i\hat{\Lambda}_0 = (\Lambda^\mu_i W_\mu)$$

— генераторы трехмерных вращений в системе покоя. Здесь

$$W^\mu = \gamma^5\left(\gamma^\mu\hat{u} - u^\mu\right),$$

Λ^μ_i — преобразованные орты пространства Минковского e^μ_i:

$$\Lambda^\mu_i = (L^{-1})^{\mu\nu}(e_i)_\nu,$$

а $\boldsymbol{\partial}'$ — производные по преобразованным координатам.

Поскольку в системе покоя уравнение БМТ описывает трехмерный поворот спина, то искомые решения уравнения Дирака должны иметь вид

$$\Psi = R\Psi_0. \tag{4}$$

Здесь Ψ_0 — решение уравнения Дирака без полей:

$$\Psi_0 = \exp\{-i(px)\}(\hat{p}+m)\psi^0_0, \quad p^\mu = mu^\mu, \tag{5}$$

а R — оператор поворота в системе покоя:

$$R = T_0 + \mathbf{WT}, \tag{6}$$

и очевидно, что $T_0^2 - \mathbf{T}^2 = 1$.

Для того чтобы оператор R был резольвентой уравнения БМТ в биспинорном представлении, он должен удовлетворять уравнению

$$\dot{R} = i(\mathbf{H}_0\mathbf{W})R, \tag{7}$$

где $\dot{R} \equiv dR/d\tau$, τ — параметр, имеющий смысл собственного времени.

Выбор оператора R, удовлетворяющего уравнению (7), обеспечивает выполнение критерия, о котором говорилось выше. Действительно, так как $\hat{S} = R\hat{S}_0R^{-1}$ и $\hat{u} = R\hat{u}_0R^{-1}$, где S_0^μ, u_0^μ — векторы спина и скорости свободной частицы, то можно показать, что с учетом (7) векторы S^μ и u^μ удовлетворяют уравнениям (2) и (3). Поэтому среднее значение аксиального тока, построенное на решении уравнения (4), будет совпадать с решением уравнения БМТ. При этом в силу коммутативности R и $\hat{u}$ плотность векторного тока будет совпадать с решением уравнения Лоренца. Таким образом, выбор решений уравнений Дирака, удовлетворяющих (4) и (7), полностью соответствует поставленной задаче.

Используя указанные выше преобразования, из уравнения (1) получаем

$$\begin{aligned}&\{\hat{p} - m + (\mathbf{H}_0\mathbf{W}) + i\gamma^5(\mathbf{E}_0\mathbf{W}) - \\ &- [(\hat{\Lambda}_0\partial_0' - \hat{\mathbf{\Lambda}}\boldsymbol{\partial}')\tau](\mathbf{H}_0\mathbf{W})\}R\Psi_0 = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Если ввести обозначение $N_0^\mu \equiv \partial'^\mu\tau = (1, -\mathbf{N_0})$, где $\mathbf{N_0} \equiv \boldsymbol{\partial}'\tau$, то условия обращения (8) в тождество записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial_0'\tau = 1, \\ \mathbf{E}_0 = [\mathbf{N}_0\mathbf{H}_0], \\ (\mathbf{N}_0\mathbf{H}_0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

из которых следует, что

$$(\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_0 = -[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0]/\mathbf{H}_0^2. \tag{10}$$

Все изложенное выше можно записать в ковариантной форме, используя дуальный тензор электромагнитного поля

$$H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$$

и тождество, справедливое для произвольного единичного вектора b^μ $(b^2 = 1)$,

$$-\frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \gamma^5H^{\mu\nu}b_\nu\gamma_\mu\hat{b} - iF^{\mu\nu}b_\nu\gamma_\mu\hat{b}. \tag{11}$$

При $b^\mu \equiv u^\mu$

$$\gamma^5H^{\mu\nu}u_\nu\gamma_\mu\hat{u} = (\mathbf{H}_0\mathbf{W}), \quad iF^{\mu\nu}u_\nu\gamma_\mu\hat{u} = -i\gamma^5(\mathbf{E}_0\mathbf{W}),$$

при этом условие $(\mathbf{EH}) = 0$ имеет вид

$$F^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = 0, \tag{12}$$

а $N^\mu = \partial^\mu\tau$ в ковариантной форме записывается так:

$$N^\mu = (H^{\mu\rho}H_{\rho\nu}u^\nu)N^{-1}, \quad N = u_\mu H^{\mu\rho}H_{\rho\nu}u^\nu. \tag{13}$$

Для того чтобы решить поставленную задачу, необходимо определить поля, для которых выполняются условия (9). Поскольку поля должны также удовлетворять уравнению Максвелла

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0,$$

возникает дополнительное условие

$$\dot{H}^{\mu\nu}N_\mu \equiv \frac{\dot{H}^{\mu\nu}H_{\nu\rho}H^{\rho\sigma}u_\sigma}{u_\nu H^{\nu\rho}H_{\rho\sigma}u^\sigma} = 0 \tag{14}$$

для любого u^μ.

Итак, получены условия, которым должны удовлетворять поля, чтобы уравнение БМТ точно описывало эволюцию спина при движении нейтральной частицы. Анализ этих условий в общем виде достаточно сложен, но можно выделить случай, когда $N^\mu = \text{const}$, т.е. внешнее поле эффективно зависит только от одной переменной. При этом условие (14) существенно упрощается. Действительно, в этом случае получаем

$$H^{\mu\nu}N_\nu = \text{const}.$$

Поскольку

$$H^{\mu\rho}H_{\rho\sigma}H^{\sigma\nu} = \frac{1}{2}H^{\mu\nu}(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(F^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma}) \tag{15}$$

и выполняется условие (12), то (14) сводится к условию

$$\frac{(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\,H^{\mu\nu}u_\nu}{u_\nu H^{\nu\rho}H_{\rho\sigma}u^\rho} = \text{const} \tag{16}$$

для любого u^μ.

Очевидно, что (16) выполняется лишь в двух случаях.

Если $(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) \neq 0$, то $H^{\mu\nu} = \text{const}$. Эти условия с учетом (12) определяют постоянные и однородные электрическое и магнитное поля, ортогональные друг другу.

Если же $(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) = 0$, то

$$N^\mu = \frac{(1, \mathbf{n})}{u^0 - (\mathbf{un})}, \quad \tau = \frac{x^0 - (\mathbf{xn})}{u^0 - (\mathbf{un})}. \tag{17}$$

Формулы (17) определяют поле произвольной плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n} = [\mathbf{E}\times\mathbf{H}]/EH$.

Приведем решения уравнения (7), по которым можно построить решения как уравнения Дирака, так и уравнения БМТ. В постоянном однородном поле решение уравнения (7) имеет вид

$$R = \exp\{i\tau\gamma^5H^{\mu\nu}u_\nu\gamma_\mu\hat{u}\}, \quad \tau = (xN). \tag{18}$$

Рассмотрим частные случаи таких полей.

Если $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{H} = 0$, то

$$R = \cos\varphi + i\gamma^5 \frac{\gamma^2 u^1 - \gamma^1 u^2}{u_-} \hat{u} \sin\varphi, \tag{19}$$

$$\varphi = E\frac{x^1 u^1 + x^2 u^2}{u_-}, \quad u_-^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2.$$

Если $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{E} = 0$, то

$$\begin{aligned} R &= \cos\varphi + i\gamma^5 \frac{\gamma^3 u^0 - \gamma^0 u^3}{\sqrt{u_-^2 + 1}} \hat{u} \sin\varphi, \\ \varphi &= H\frac{x^0 u^0 - x^3 u^3}{\sqrt{u_-^2 + 1}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Когда $\mathbf{u} = 0$, фаза $\varphi = \Omega_L t$, где Ω_L — частота Лармора.

В плосковолновом поле тензор $F^{\mu\nu}$ имеет вид

$$F^{\mu\nu} = A_1'(n^\mu a_1^\nu - a_1^\mu n^\nu) + A_2'(n^\mu a_2^\nu - a_2^\mu n^\nu),$$

$$A_i' \equiv \frac{\partial A_i}{\partial (nx)}.$$

Для этой записи введен стандартный базис в пространстве Минковского:

$$n = (1, \mathbf{e}_3), \quad n_+ = \frac{1}{2}(1, -\mathbf{e}_3),$$

$$a_1 = (0, \mathbf{e}_1), \quad a_2 = (0, \mathbf{e}_2).$$

Решение уравнения (7) определяется формулой (6), причем если для Λ^μ выбрана реализация

$$\Lambda_{1,2}^\mu = a_{1,2}^\mu - \frac{(ua_{1,2})}{(un)} n^\mu, \quad \Lambda_3^\mu = \frac{n^\mu}{(un)} - u^\mu,$$

то T^μ удовлетворяет простому уравнению. Действительно, вводя комплексные матрицы из группы SU(2) $\underset{\sim}{T} = T^\mu \sigma_\mu$, получаем

$$\dot{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{T}$$

с коэффициентной матрицей

$$\underset{\sim}{B} = i[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{e}_3]\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{A}_- \\ \dot{A}_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение такого уравнения рассматривалось в работах [7, 8].

Используя полученный оператор эволюции R, можно записать матрицу плотности для нейтральных частиц в рассматриваемых полях:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)[1 - \gamma^5 \hat{S}(\tau(x))] R(\tau(x)) \times \\ \times R^{-1}(\tau(y)) \exp^{-i\hat{p}(x-y)} \delta(p^2 - m^2). \end{aligned} \tag{21}$$

Вычисляя плотности векторного и аксиального токов с помощью этой матрицы плотности, получаем

$$\langle \gamma^\mu \rangle = p^\mu \quad \text{и} \quad \langle \gamma^5 \gamma^\mu \rangle = S^\mu.$$

Полученные результаты можно использовать при оценке правдоподобности выводов работ, посвященных попыткам модифицировать силу Лоренца для вращающихся частиц в слабоменяющихся электромагнитных полях на основе чисто классических соображений (см. [9] и цитированную там литературу).

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за обсуждение работы.

Литература

1. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1989.
2. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
3. *Fradkin D.M., Good R.H.* // Rev. Mod. Phys. 1961. **33**. P. 343.
4. *Тернов И.М., Халилов В.Р, Павлова О.С.* // Изв. вузов, Физика. 1978. №12. С. 89; 1979. №2. С. 39.
5. *Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М.* и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Лавров П.М.* // Квантовая электродинамика с внешним полем / Ред. Д. М. Гитман. Томск, 1977. С. 120.
7. *Лобанов А.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. №2. С. 59 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 2. P. 85).
8. *Лобанов А.Е.* Препринт физ. ф-та МГУ. М., 1988, №24.
9. *Chaichian M., Gonzalez Felipe R., Martinez D.L.* // Phys. Lett. 1997. **A236**. P. 188.

Поступила в редакцию
24.06.98