

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

О СОДЕРЖАТЕЛЬНОМ ТОЛКОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Сформулирован принцип относительности в теории возможностей, согласно которому содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкал.

Введение

Принцип относительности в физике, как известно, декларирует физическую эквивалентность всех инерциальных систем отсчета. Это означает, что математическая формулировка любого закона природы должна быть одной и той же в любой инерциальной системе отсчета, в координатах которой формулируется закон, или, более формально, должна быть инвариантна относительно преобразований группы Лоренца, определяющих как преобразования координат при замене одной инерциальной системы отсчета на другую, так и преобразования всех физических величин, участвующих в формулировке закона.

В настоящей работе рассмотрены шкалы значений мер возможности и необходимости [1, 2], играющие роль систем отсчета, выбираемых исследователем, и группы автоморфизмов шкал, мер и областей их определения, относительно которых должны быть инвариантны все определения, конструкции и соотношения теории возможностей, которым может быть дано содержательное, не зависящее от выбора шкалы толкование. В этих терминах сформулирован принцип относительности в теории возможностей, согласно которому любые теоретико-возможностные заключения объявляются эквивалентными, если в некоторых шкалах их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкал.

Согласно этому принципу, в теории возможностей [1, 2] не могут быть содержательно истолкованы ответы на такие вопросы, как, например: чему равна возможность того или иного события, насколько (или во сколько раз) возможность одного события больше, чем другого, и т.п. (если речь не идет о значениях возможности, равных нулю или единице). В то же время утверждения типа «возможность одного события больше, меньше или равна возможности другого» звучат одинаково в любой шкале.

1. Шкалы значений возможности и необходимости. Преобразования шкал

Содержательное толкование возможности^{*}, рассмотренной в работах [1–5], обусловлено свойствами

шкалы \mathcal{L} ее значений. Шкала \mathcal{L} определена как отрезок $[0, 1]$ с естественным отношением порядка, заданным неравенством « \leq », и двумя коммутативными, ассоциативными и взаимно-дистрибутивными правилами композиции — сложением « $+$ » и умножением « \bullet »: $a + b \triangleq \max(a, b)$, $a \bullet b \triangleq \min(a, b)$, $a, b, \in [0, 1]$, согласованными с упорядоченностью^{**}), $\mathcal{L} \triangleq ([0, 1], \leq, +, \bullet)$. Нейтральные элементы — «ноль» $\mathbf{0}$ и «единица» $\mathbf{1}$ шкалы \mathcal{L} совпадают соответственно с нулем и единицей отрезка $[0, 1]$, $\mathbf{0} + a = a$, $\mathbf{0} \bullet a = \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \bullet a = a$, $\mathbf{1} + a = \mathbf{1}$, $a \in \mathcal{L}$. На \mathcal{L} определена операция $\neg(\cdot)$ «отрицания», обладающая свойствами

$$\begin{aligned} \neg(\neg(a)) &= a, & a \leq b &\Leftrightarrow \neg(a) \geq \neg(b), \\ \neg(a + b) &= (\neg(a)) \bullet (\neg(b)), & \neg(a \bullet b) &= (\neg(a)) + (\neg(b)), \\ a, b \in \mathcal{L}, & \neg(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, & \neg(\mathbf{1}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

и порождающая шкалу $\tilde{\mathcal{L}} = \neg(\mathcal{L})$, дуально изоморфную \mathcal{L}^{***}). В шкале $\tilde{\mathcal{L}} = ([0, 1], \tilde{\leq}, \tilde{+}, \tilde{\bullet})$ $\tilde{\mathbf{0}} \triangleq \mathbf{1}$, $\tilde{\mathbf{1}} \triangleq \mathbf{0}$, упорядоченность $\tilde{\leq}$ «противоположна» естественной: $a \tilde{\leq} b \Leftrightarrow a \geq b$, так что $\tilde{\mathbf{0}} \tilde{\leq} \tilde{\mathbf{1}}$, $a \tilde{+} b = \min(a, b)$, $a \tilde{\bullet} b = \max(a, b)$. $\tilde{\mathcal{L}}$ используется как шкала значений необходимости [2].

Свойства шкалы $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, +, \bullet)$, определяющие содержательное толкование возможности, удобно охарактеризовать в терминах преобразований, отображающих \mathcal{L} (т.е. «четверку»: отрезок

^{*}) Речь идет о мере возможности, определенной на некоторой σ -алгебре событий [1].

^{**}) Символ « \triangleq » означает «равенство по определению». Шкала \mathcal{L} является полной дистрибутивной структурой (решеткой), в которой $a \vee b \triangleq a + b$, $a \wedge b \triangleq a \bullet b$ [6].

^{***}) Далее для простоты будем $\neg(a)$ записывать короче, как $\neg a$, $a \in [0, 1]$. Взаимно однозначное соответствие $\neg(\cdot): \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ называется дуальным изоморфизмом (дуальным автоморфизмом, если считать, что $\neg(\cdot): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$), или инволюцией. Обычно полагают $\neg a = 1 - a$, $a \in [0, 1]$. Можно выбрать $\neg_\beta = \beta - \beta^{-1}$, где $\beta(\cdot)$ — любое строго монотонное преобразование $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Если, например, $\beta a = a^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, то инволюция \neg_β будет определена формулой $\neg_\beta a = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$.

$[0, 1]$, упорядоченность \leq и операции $+$ и \bullet в себя. Пусть Γ — группа преобразований $\gamma(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, задаваемых непрерывными монотонно возрастающими функциями $\gamma(\cdot)$, такими, что $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Очевидно, шкала \mathcal{L} инвариантна относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и, наоборот, Γ есть множество непрерывных преобразований $\gamma(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} a \in [0, 1] &\Leftrightarrow \gamma(a) \in [0, 1], & a \leq b &\Leftrightarrow \gamma(a) \leq \gamma(b), \\ \gamma(a + b) &= \gamma(a) + \gamma(b), & \gamma(a \bullet b) &= \gamma(a) \bullet \gamma(b), & (1) \\ \gamma(0) &= 0, & \gamma(1) &= 1, & a, b \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Иначе говоря, Γ — группа всех монотонных (сохраняющих упорядоченность) автоморфизмов шкалы $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, +, \bullet)$.

2. Возможность и необходимость нечеткого события. Преобразования. Эквивариантность

В основе теории возможностей лежит конструкция меры $p(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}$, определенной на классе $\mathcal{L}(X)$ (\mathcal{A} -измеримых) функций $f(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$, принимающей значения в шкале \mathcal{L} , линейной:

$$\begin{aligned} p((a \bullet f)(\cdot) + (b \bullet g)(\cdot)) &= (a \bullet p(f(\cdot))) + (b \bullet p(g(\cdot))), \\ a, b \in [0, 1], & f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \end{aligned} \tag{2}$$

и счетно-аддитивной: $p\left(\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n\right)(\cdot)\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot))$, $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$. Класс $\mathcal{L}(X)$ наделен частичной упорядоченностью: $f(\cdot) \leq g(\cdot) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, $x \in X$, и двумя правилами композиции $(f + g)(x) \triangleq f(x) + g(x)$, $(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$, $x \in X$, согласованными с правилами композиции, принятыми в \mathcal{L} . Кроме того, в $\mathcal{L}(X)$ определены счетные операции^{*)}: $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) \triangleq \bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\left(\bigodot_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) \triangleq \bigodot_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in X$, а также операция умножения на константу $(a \bullet f)(x) \triangleq a \bullet f(x)$, $x \in X$, $a \in [0, 1]$, что вместе с операцией сложения наделяет \mathcal{L} чертами линейности. Функция $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ в теории возможностей называется характеристической функцией (х. ф.) нечеткого события; «четкое» событие отличается тем, что его х. ф. принимает лишь два значения: 0 или 1. Величина $p(f(\cdot))$ называется возможностью нечеткого события с х. ф. $f(\cdot)$. Если $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$ $x \in X$ — х. ф. «четкого» события $A \in \mathcal{A}$, то $P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot))$ называется возможностью A [1].

В $\mathcal{L}(X)$ определена операция «отрицания», которую обозначим символом $\neg \circ$, использованным

^{*)} Класс $\mathcal{L}(X)$ — полная дистрибутивная решетка [6], в которой $(f \vee g)(\cdot) \triangleq (f + g)(\cdot)$, $(f \wedge g)(\cdot) \triangleq (f \bullet g)(\cdot)$.

с аналогичной целью ранее: $\neg \circ f(x) \triangleq (\neg \circ f)(x) \triangleq \bigoplus_{n=1}^{\infty} \neg(f(x))$, $x \in X$. Очевидно, $f(\cdot) \leq g(\cdot) \Leftrightarrow \neg \circ f(\cdot) \geq \neg \circ g(\cdot)$, $\neg \circ (\neg \circ f)(\cdot) = f(\cdot)$, $\neg \circ (f + g)(\cdot) = ((\neg \circ f) \bullet (\neg \circ g))(\cdot)$, $\neg \circ (f \bullet g)(\cdot) = ((\neg \circ f) + (\neg \circ g))(\cdot)$, $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Класс $\tilde{\mathcal{L}}(X) = \{\neg \circ f(\cdot), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)\}$ функций $\neg \circ f(\cdot): X \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$, дуальный $\mathcal{L}(X) = \{\neg \circ f(\cdot), f(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X)\}$, наделен упорядоченностью $\tilde{\leq}$: $f(\cdot) \tilde{\leq} g(\cdot) \Leftrightarrow f(\cdot) \geq g(\cdot)$ и двумя правилами композиции $+$ и $\tilde{\bullet}$: $(f \tilde{+} g)(x) \triangleq f(x) \tilde{+} g(x)$, $(f \tilde{\bullet} g)(x) \triangleq f(x) \tilde{\bullet} g(x)$, $x \in X$, согласованными с одноименными правилами композиции в $\tilde{\mathcal{L}}$. Класс $\tilde{\mathcal{L}}(X)$, очевидно, замкнут относительно операций, дуальных приведенным в (1).

В теории возможностей определяется мера неопределенности, основанная на мере $n(\cdot): \tilde{\mathcal{L}}(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$, дуальной мере $p(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}$. Мера $n(\cdot)$ определена как линейная:

$$n\left(\left(a \tilde{\bullet} f\right)(\cdot) \tilde{+} \left(b \tilde{\bullet} g\right)(\cdot)\right) = \left(a \tilde{\bullet} n(f(\cdot))\right) \tilde{+} \left(b \tilde{\bullet} n(g(\cdot))\right),$$

$$a, b \in [0, 1], \quad f(\cdot), g(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X),$$

и счетно-аддитивная: $n\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} n(f_n(\cdot))$, $\{f_n(\cdot)\} \subset \tilde{\mathcal{L}}(X)$, функция, заданная на $\tilde{\mathcal{L}}(X)$ и принимающая значения в $\tilde{\mathcal{L}}$ [2]. Мера $p(\cdot)$, в свою очередь, дуальна мере $n(\cdot)$, и их связь фиксируется формулой

$$n(f(\cdot)) = \neg(p(\neg \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X), \tag{3}$$

или

$$p(f(\cdot)) = \neg(n(\neg \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \tag{4}$$

Группе Γ монотонных изоморфизмов шкалы \mathcal{L} соответствуют две изоморфные ей группы преобразований: группа $\Gamma \circ$ монотонных изоморфизмов класса $\mathcal{L}(X)$, определенных равенством $(\gamma \circ f)(x) \triangleq \gamma(f(x))$, $x \in X$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие $\Gamma \circ \ni \gamma \circ \Leftrightarrow \gamma(\cdot) \in \Gamma$, и группа Γ^* изоморфизмов класса мер $p(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}$,

$$(\gamma^* p)(f(\cdot)) \triangleq \gamma(p(\gamma^{-1} \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \tag{5}$$

При этом также имеет место взаимно однозначное соответствие $\Gamma^* \ni \gamma^* \Leftrightarrow \gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Что касается группы $\Gamma \circ$, то очевидно, что $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \gamma \circ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, т.е. $f(\cdot) \leq g(\cdot) \Leftrightarrow ((\gamma \circ f) \leq (\gamma \circ g))(\cdot)$; $\gamma \circ (f + g)(\cdot) = ((\gamma \circ f) + (\gamma \circ g))(\cdot)$; $\gamma \circ (f \bullet g)(\cdot) = ((\gamma \circ f) \bullet (\gamma \circ g))(\cdot)$. Отсюда и из условия (2) следует, что

$$\begin{aligned} (\gamma^* p)\left(\left(a \bullet f\right)(\cdot) + \left(b \bullet g\right)(\cdot)\right) &= \\ &= a \bullet (\gamma^* p)(f(\cdot)) + b \bullet (\gamma^* p)(g(\cdot)), \end{aligned} \tag{6}$$

Если $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ определяет преобразование шкалы \mathcal{L} , то х.ф. $f_A(\cdot): X \rightarrow \mathcal{L}$ нечеткого события A преобразуется в $\gamma \circ f_A(\cdot)$, а значение $p(f_A(\cdot))$ его возможности — в значение $\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot)) = \gamma(p(f_A(\cdot)))$, отвечающее преобразованию шкалы \mathcal{L} . Если A — четкое событие, $\chi_A(\cdot)$ — его х.ф., то при тех же условиях $\chi_A(\cdot) \rightarrow \gamma \circ \chi_A(\cdot) \equiv \chi_A(\cdot)$ и $P(A) \stackrel{\Delta}{=} p(\chi_A(\cdot)) \rightarrow \gamma * p(\gamma \circ \chi_A(\cdot)) = \gamma(P(A))$.

Следовательно, содержательный, не зависящий от выбора шкалы \mathcal{L} смысл имеют не значения возможностей, а лишь соотношения «меньше», «равно» или «больше» между ними. Исключение составляют лишь значения возможности (и необходимости), равные нулю или единице, не изменяющиеся при любом преобразовании шкал. Например, неравенство возможностей $p(f_A(\cdot)) < p(f_B(\cdot))$ верно независимо от используемой шкалы, а значения $p(f_A(\cdot))$ и $p(f_B(\cdot))$ зависят от выбранной шкалы (если они отличны от нуля и единицы) и не могут быть содержательно истолкованы. Сказанное, разумеется, относится и к значениям характеристических функций $f_A(x)$ и $f_B(x)$, $x \in X$: соотношение $f_A(x) \leq f_B(x)$, $x \in X$, имеет один и тот же смысл в любой шкале, а значение $f_A(x)$ возможности включения $x \in X$ в нечеткое множество A , отличное от нуля и единицы, зависит от используемой шкалы и не может быть содержательно истолковано.

Поскольку все определения, конструкции и соотношения теории возможностей должны быть одинаковы в любых шкалах \mathcal{L} и $\tilde{\mathcal{L}}$, они должны быть инвариантны относительно одновременных преобразований всех их компонент: $f(\cdot) \rightarrow \gamma \circ f(\cdot)$, $p(\cdot) \rightarrow \gamma * p(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot) \rightarrow \tilde{\gamma} \circ \tilde{f}(\cdot)$, $n(\cdot) \rightarrow \tilde{\gamma} * n(\cdot)$ и т. п., выполненных согласно диаграмме.

Например, уравнение $P(A|B) \bullet P(B) = P(A \cap B)$, определяющее условную относительно B возможность $P(A|B)$ события A [3], инвариантно относительно используемой шкалы \mathcal{L} , ибо оно эквивалентно уравнению $(\gamma * P(A|B)) \bullet (\gamma * P(B)) = \gamma * P(A \cap B)$ при любом $\gamma(\cdot) \in \Gamma$. Действительно, $\gamma * P(A \cap B) \stackrel{\Delta}{=} \gamma(P(A \cap B)) = \gamma(P(A|B) \bullet P(B)) = \gamma(P(A|B)) \bullet \gamma(P(B)) \stackrel{\Delta}{=} (\gamma * P(A|B)) \bullet (\gamma * P(B))$. Аналогично проверяется инвариантность относительно выбора \mathcal{L} уравнения

$$p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot)) \bullet p(f_B(\cdot)) = p(f_A \bullet f_B(\cdot)), \quad (9)$$

определяющего условную относительно нечеткого события B с х.ф. $f_B(\cdot)$ возможность

$p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot))$ нечеткого события A с х.ф. $f_A(\cdot)$, а именно: уравнение (9) эквивалентно уравнению $(\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot)|\gamma \circ f_B(\cdot))) \bullet (\gamma * p(\gamma \circ f_B(\cdot))) = \gamma * p((\gamma \circ f_A) \bullet (\gamma \circ f_B)(\cdot))$ при любом $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

P -независимость событий A и B , означающая, что $P(A) \bullet P(B) = P(A \cap B)$, эквивалентна $\gamma * P$ -независимости A и B , $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, а если A и B — нечеткие события с х.ф. $f_A(\cdot)$ и $f_B(\cdot)$ соответственно, то их P -независимость: $p(f_A \bullet f_B(\cdot)) = p(f_A(\cdot)) \bullet p(f_B(\cdot))$ эквивалентна $\gamma * P$ -независимости нечетких событий A , B , которые в преобразованной шкале описываются х.ф. $\gamma \circ f_A(\cdot)$ и $\gamma \circ f_B(\cdot)$: $\gamma * p((\gamma \circ f_A) \bullet (\gamma \circ f_B)(\cdot)) = (\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot))) \bullet (\gamma * p(\gamma \circ f_B(\cdot)))$.

При P -оптимальном оценивании нечеткого элемента ξ [7] требуется решить задачу на минимум для возможности ошибки оценивания $L(y) = p_{\varphi^{\xi}}(l(\cdot, y)) = \sup_{x \in X} \min(\varphi^{\xi}(x), l(x, y)) \sim \min_{y \in X}$. Множество P -оптимальных оценок $X_* = \{y \in X, L(y) = \min_{\bar{y} \in X} L(\bar{y})\}$, очевидно, не зависит от выбора шкалы \mathcal{L} , ибо при переходе к новой шкале $L(y) \rightarrow \gamma(L(y))$, в то время как $X_* \rightarrow X_*$.

В работе [8] показано, как принцип относительности используется при решении теоретико-возможностной задачи интерпретации измерений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-01081).

Литература

1. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
2. Пытьев Ю.П. // Там же. 1997. № 4. С. 3 (Ibid. 1997. No. 4. P. 1).
3. Пытьев Ю.П. // Там же. 1997. № 6. С. 3 (Ibid. 1997. No. 6. P. 1).
4. Пытьев Ю.П. // Там же. 1998. № 1. С. 3 (Ibid. 1998. No. 1. P. 1).
5. Пытьев Ю.П. // Там же. 1998. № 2. С. 3 (Ibid. 1998. No. 2. P. 1).
6. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
7. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6. P. 1).
8. Пытьев Ю.П. // Там же. 1999. № 1. С. 3 (Ibid. 1999. No. 1. P. 1).

Поступила в редакцию
29.04.98