

Рис. 3. Температурная зависимость пирозлектрического тока для тонких слоев системы  $K_x Na_{1-x} NO_2$

пространственного заряда, возникающего в тонком слое соответствующего состава при поляризации его в постоянном электрическом поле.

Таким образом, данные всех электрических измерений свидетельствуют о том, что при введении примеси температура фазового перехода понижается. Это позволяет фазовую диаграмму системы представить в виде кривой 2 на рис. 2.

Наши экспериментальные данные показывают, что введение в сегнетоэлектрический нитрит натрия сравнительно небольшого количества ионов  $K^+$  существенно модифицирует электрические свойства

тонких слоев. Хотя при изменении  $x$  полярная орторомбическая структура сохраняется вплоть до  $x = 0,1$ , введение ионов калия вызывает локальные искажения структуры несегнетоэлектрического типа; это приводит к «ухудшению» сегнетоэлектрических свойств — понижению температуры фазового перехода, спонтанной поляризации, диэлектрической проницаемости. Отмеченный выше эффект уменьшения электропроводности примесных кристаллов связан, по-видимому, с уменьшением подвижности ионов металла при возрастании ионного радиуса (ионный радиус  $K^+$  равен  $1,33 \text{ \AA}$ , ионов  $Na^+$  —  $0,95 \text{ \AA}$ ).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-02-16319) и программы «Университеты России».

#### Литература

1. Frazer B.C., Ueda R., Kay M.I. // Acta Cryst. 1960. 13. P. 705.
2. Truter M.R. // Acta Cryst. 1957. 7. P. 73.
3. Hamano K., Zhang J. // J. Phys. Soc. Japan. 1996. 65. P. 142.
4. Hatta I. // J. Phys. Soc. Japan. 1974. 38. P. 1430.
5. Hirotsu S., Miyamoto M. // Japan. J. Appl. Phys. 1981. 20. P. 12.
6. Ziegler G.E. // Z. Kristallogr. 1936. A94. P. 491.
7. Cleaver B., Rhodes E., Ubbelode A.R. // Proc. Roy. Soc. (Lond.) 1963. A276. P. 453.
8. Tanisaki S., Ishimatsu T. // J. Phys. Soc. Japan. 1965. 20. P. 1277.
9. Хаммад Т., Эль-Каббани Ф., Бард И. // ФТТ. 1986. 28. С. 1375.
10. Vogt H., Zepf H.P., Ruppel W. // Ferroelectrics. 1981. 33. P. 53.

Поступила в редакцию  
14.04.99

## АСТРОНОМИЯ

УДК 521.135

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. Ю. Кочеткова

(ГАИШ)

Впервые в нелинейном приближении исследованы области устойчивости треугольных точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел.

#### Введение

Устойчивость треугольных точек либрации в нелинейном приближении эллиптической пространственной задачи трех тел была исследована А. П. Маркеевым [1] для системы Солнце–Юпитер. В. В. Радзиевский [2] сформулировал фотогравитационную ограниченную задачу трех тел. В настоящей работе рассмотрена более общая задача.

#### Постановка задачи

Рассматриваются тела  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_0$ . Тело  $M_0$  имеет бесконечно малую массу. Движение тел  $M_1$  и  $M_2$  определяется соотношением

$$r = p(1 + e \cos \nu)^{-1},$$

где  $r$  — расстояние между  $M_1$  и  $M_2$ ,  $p$  — фокальный параметр, принимаемый за единицу длины,

а истинная аномалия  $\nu$  является независимой переменной. Эксцентриситет орбиты  $e$  в случае ограниченной эллиптической задачи принимает значения в интервале  $(0, 1)$ . На тело  $M_0$  со стороны тел  $M_1$  и  $M_2$  кроме силы тяготения действует сила светового давления. Введем  $Q_1$  и  $Q_2$  — соответствующие телам  $M_1$  и  $M_2$  фотогравитационные параметры, которые равны единице при отсутствии светового давления и нулю, когда сила светового давления становится равной силе тяготения. Тогда силовая функция поля, в котором движется тело  $M_0$ , имеет вид

$$U = \frac{Q_1}{R_1}(1 - \mu) + \frac{Q_2}{R_2}\mu,$$

где  $\mu$  — отношение массы тела  $M_2$  к сумме масс тел  $M_1$  и  $M_2$ , а  $R_1$  и  $R_2$  — расстояния от  $M_0$  до этих тел соответственно. Движение тела  $M_0$  рассматриваем в координатах Нехвила [3]:

$$\xi'' - 2\eta' = \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi},$$

$$\eta'' + 2\xi' = \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial \eta},$$

$$\zeta'' + \zeta = \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta},$$

$\Phi = (1 + e \cos \nu)^{-1}$ ,  $\Omega = 0,5(\xi^2 + \eta^2) - 0,5e \cos \nu \cdot \zeta^2 + U$ ,  $R_1^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ,  $R_2^2 = (\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2$ , штрихами обозначены производные по  $\nu$ .

Для функции Гамильтона имеем [4]:

$$H = 0,5(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \\ + 0,5\Phi e \cos \nu (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \Phi U,$$

$p_\xi$ ,  $p_\eta$ ,  $p_\zeta$  — обобщенные импульсы.

### Нормализация гамильтониана

Координаты треугольных точек либрации  $(\xi_0, \eta_0, 0)$  вычисляются по формулам [5]:

$$\xi_0 = 0,5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) + 0,5 - \mu, \\ \eta_0 = \sqrt{Q_1^{2/3} - 0,25(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1)^2}.$$

Затем, переместив положение равновесия в начало координат с помощью замены

$$\xi = \xi_0 + q_1, \quad \eta = \eta_0 + q_2, \quad \zeta = q_3, \\ p_\xi = p_{\xi_0} + p_1, \quad p_\eta = p_{\eta_0} + p_2, \quad p_\zeta = p_3,$$

раскладываем функцию Гамильтона в ряд Тейлора в окрестности этой точки:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots,$$

где  $H_m$  — компонента  $m$ -й степени относительно  $q_j$ ,  $p_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Приведение квадратичной формы  $H_2$  к нормальному виду осуществлялось методом, предложенным в работе [6]. Найдя характеристические показатели  $\pm i\lambda_j$  линейной системы (причем  $\lambda_3 = 1$ ) и соответствующие им собственные векторы, можно построить нормализующую матрицу. В результате  $H_2$  принимает вид (в полярных координатах  $r_j$ ,  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ):  $H_2 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3$ .

Нелинейная нормализация  $H_m$  ( $m = 3, 4$ ) выполнялась методом точечных отображений [7]. Суть метода заключается в следующем. Если выбрать производящую функцию  $S$  преобразования, которое переводило бы систему с функцией Гамильтона  $H(q_j, p_j, \nu)$  в систему  $H \equiv 0$ , то можно нормализовать эту функцию  $S$ , т.е. найти такую систему координат  $\rho_j, \theta_j$ , в которой  $S$  имела бы наиболее простой вид. А затем по нормализованной функции отображения легко получить искомый гамильтониан в нормальном виде.

При отсутствии резонансов третьего порядка можно полностью избавиться от членов 3-й степени по  $\sqrt{\rho_j}$ . В найденной вышеуказанным способом системе полярных координат  $\rho_j, \theta_j$  нормализованная функция Гамильтона с учетом членов до 4-го порядка включительно по  $\sqrt{\rho_j}$  будет иметь вид [8]

$$H = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \rho_3 + A\rho_1^2 + B\rho_1\rho_2 + C\rho_2^2 + \\ + \rho_3(F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + F_3\rho_3),$$

$$F_j = D_j + E_j \sin(2\theta_3 - 2\nu) + G_j \cos(2\theta_3 - 2\nu) + \\ + K_j \sin(4\theta_3 - 4\nu) + L_j \cos(4\theta_3 - 4\nu).$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D_j$ ,  $E_j$ ,  $G_j$ ,  $K_j$ ,  $L_j$  не зависят от  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  и  $\nu$ .

Далее проверяется условие устойчивости для большинства начальных условий, когда  $D = B^2 - 4AC \neq 0$  и исследуется функция  $F_3(\psi)$ :

$$F_3(\psi) = D_3 + E_3 \sin(2\psi) + G_3 \cos(2\psi) + \\ + K_3 \sin(4\psi) + L_3 \cos(4\psi).$$

Когда существует такое  $\psi$ , что  $F_3(\psi) = 0$  при  $dF_3/d\psi \neq 0$ , положение равновесия неустойчиво по Ляпунову [4].

### Вычисления и результаты

Вычисления проводились с использованием численных и аналитических средств программирования языка Matlab. Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

В плоскости  $e, \mu$  жирная линия ограничивает область линейной устойчивости. Пунктирными линиями обозначены резонансные кривые 3-го и 4-го порядков. Тонкой линии соответствует  $D = 0$ , а в заштрихованных областях  $D < 0$ . Функция  $F_3(\psi)$  принимает нулевые значения в очень узкой двумерной области, обозначенной точечной линией. На рис. 1

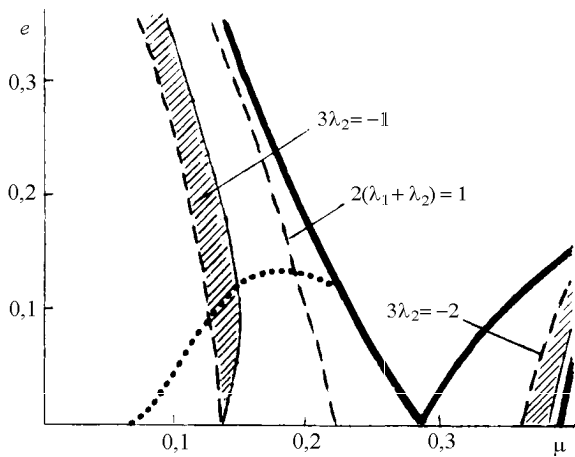


Рис. 1

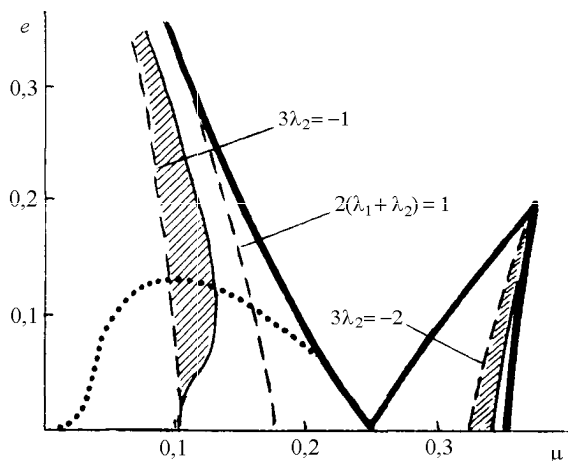


Рис. 2

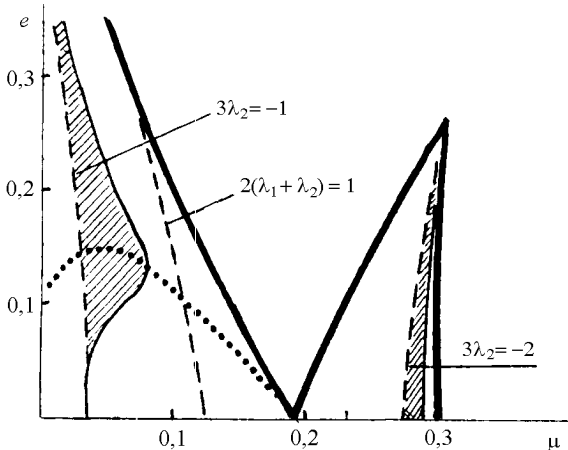


Рис. 3

параметры  $Q_1$  и  $Q_2$  равны единице. По мере уменьшения значений  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 2 и 3) уменьшается область линейной устойчивости, резонансные кривые становятся более крутыми. Область существования  $F_3(\psi) = 0$  приближается к оси  $\mu = 0$ , а область, в которой  $D < 0$ , поднимается вдоль резонансной кривой  $3\lambda_2 = -1$  и становится несколько шире. На рис. 2  $Q_1 = Q_2 = 0,98$ , а на рис. 3  $Q_1 = Q_2 = 0,95$ . Существование линии  $D = 0$  вдоль резонанса  $3\lambda_2 = -2$  сохраняется, причем соответствующая ей область  $D < 0$  увеличивается с уменьшением  $Q_1$  и  $Q_2$ , но незначительно.

Случай  $Q_1 \neq Q_2$  не влияет качественно на картину устойчивости [5].

### Заключение

Впервые осуществлена нелинейная нормализация до членов 4-й степени включительно гамильтониана пространственной ограниченной эллиптической фотогравитационной задачи трех тел для любых значений эксцентриситета. Получены области устойчивости для большинства начальных условий и области неустойчивости по Ляпунову треугольных точек либрации данной задачи в нелинейном приближении. Исследовано изменение этих областей в зависимости от фотогравитационных параметров.

### Литература

1. Маркеев А.П. // Астрон. журн. 1974. **51**, №3. С. 217.
2. Радзиевский В.В. // Астрон. журн. 1953. **30**. С. 256.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1978.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
5. Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №5. С. 72.
6. Маркеев А.П. // Прикладная матем. и мех. 1972. **36**, №5. С. 805.
7. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., 1972.
8. Маркеев А.П. Препринт Ин-та проблем механики. 1973. №49.

Поступила в редакцию  
17.03.99