УДК 517.958:532.5

О МОДЕЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА, ОПИСЫВАЮЩЕМ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Исследована математическая модель, описывающая переходные процессы в полупроводниках. Показано, что исходная физическая постановка задачи редуцируется к начально-краевой задаче для уравнения высокого порядка в частных производных составного типа. При рассмотрении соответствующей одномерной начально-краевой задачи выявлено полное соответствие теоретических результатов, полученных на основе предложенной математической модели с наблюдаемым динамическим эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

1. Математическая модель

В работах [1, 2] была предложена модель для теоретического описания одного интересного явления, наблюдающегося при исследовании переходных процессов в некоторых кристаллических полупроводниках. Эффект заключался в том, что в первоначально однородном полупроводнике, облученном лазером, после помещения его в постоянное электрическое поле конденсатора наблюдалось образование слоев объемного заряда чередующихся знаков. Причем со временем толщина слоев уменьшалась, а их количество и абсолютная величина плотности объемного заряда в каждом слое увеличивались [1]. Данное явление было названо эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

Исходная система уравнений, описывающая переходные процессы в полупроводнике, имеет вид [2]

$$\Delta_3\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{1}$$

$$\rho^\sigma = \rho - e(n_0 - n), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho^\sigma}{\partial t} = e\frac{n_0 - n}{\tau}, \tag{3}$$

где ρ — плотность объемного заряда в кристалле, ρ^σ — плотность объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника, n_0 – равновесная концентрация электронов, n — концентрация свободных электронов, которая может быть выражена через потенциал $\varphi(x,t)$ электрического поля с помощью закона Больцмана:

$$n = n_0 \exp\frac{e\varphi}{kT_e}, \tag{4}$$

τ — характерное время жизни свободных электронов, ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника, T_e — температура свободных электронов, $x \in \Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega \in A^{(1,\lambda)}$.

Система уравнений (1)–(4) с помощью общих методов, развитых в работе [6], при начальном условии $\rho^\sigma(x,t)|_{t=0} = 0$ в классе функций $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}\Big([0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\Big)$ редуцируется к одному интегродифференциальному нелинейному уравнению:

$$\Delta_3\varphi(x,t) - \frac{4\pi e n_0}{\varepsilon}\left(f(\varphi)(x,t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t ds\, f(\varphi)(x,s)\right) = 0, \tag{5}$$

$f(\varphi) = \exp(e\varphi/kT_e) - 1$.

В случае, если на границе области Ω задано распределение потенциала электрического поля, приходим к следующему граничному условию:

$$\varphi|_{x\in\partial\Omega} = a(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \geqslant 0, \tag{6}$$

где $a(x,t) \in \mathbb{C}^{(0)}\Big(\partial\Omega \times [0,+\infty)\Big)$ — заданная функция. При дополнительном условии

$$\frac{|ea(x,t)|}{kT_e} < 1 \tag{7}$$

уравнение (5) может быть линеаризовано. При этом приходим к уравнению

$$\Delta_3\varphi(x,t) - \frac{1}{r_d^2}\left(\varphi(x,t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t ds\varphi(x,s)\right) = 0, \tag{8}$$

где $r_d = \sqrt{\varepsilon kT_e/(4\pi e^2 n_0)}$ — радиус Дебая. Выполняя естественное требование согласования начального и граничного условий, из уравнения (8) в рассматриваемом классе функций $\varphi(x,t)$ получаем, что начальное распределение потенциала электрического поля в полупроводнике удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\Delta_3\varphi_0(x) - \frac{1}{r_d^2}\varphi_0(x) = 0, \tag{9}$$

$$\varphi_0|_{x\in\partial\Omega} = a(x,0), \quad x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Если, кроме того, предположить, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\Big((0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\Big)$, то в данном расширенном классе гладкости интегродифференциальное уравнение (8) эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа (см. [3–6]) с начальным условием (9)–(10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_3\varphi(x,t)-\frac{1}{r_d^2}\varphi(x,t)\right)-\frac{1}{r_d^2\tau}\varphi(x,t)=0. \qquad (11)$$

Таким образом, приходим к постановке начально-краевой задачи $\mathbf{D}_3$.

Задача $\mathbf{D}_3$. Найти непрерывную функцию $\varphi(x,t)$ в $\overline{\Omega}\times[0,+\infty)$, принадлежащую классу $\mathbb{C}\Big([0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\Big)\ \cap\ \mathbb{C}^{(1)}\Big((0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(\Omega)\Big)$ и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (11), граничному условию (6), начальному условию (9)–(10).

Существование и единственность решения поставленной начально-краевой задачи может быть доказано методами, развитыми в предыдущих работах авторов [3–6].

В следующем разделе мы рассмотрим простейшую, но важную начально-краевую задачу в том случае, если $x\in\Omega\equiv(0,d)\subset\mathbb{R}^1$, $0<d<+\infty$. Назовем данную задачу $\mathbf{D}_1$.

2. Анализ решения задачи $\mathbf{D}_1$

Рассматриваемая задача $\mathbf{D}_1$ в безразмерных переменных x/r_d, t/τ имеет вид

$$(\varphi_{xx}(x,t)-\varphi(x,t))_t-\varphi(x,t)=0, \qquad (12)$$

$$(x,t)\in(0,\beta)\times(0,+\infty),\quad \varphi|_{x=0}=V,\quad \varphi|_{x=\beta}=0,$$

$$t\in[0,+\infty),\quad V\in\mathbb{R}^1,\quad \beta=d/r_d,$$

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\quad x\in[0,\beta],$$

где функция $\varphi_0(x)$ — решение следующей краевой задачи:

$$(\varphi_0)_{xx}-\varphi_0=0,\quad x\in(0,\beta), \qquad (13)$$

$$\varphi_0(0)=V,\quad \varphi_0(\beta)=0.$$

Как нетрудно убедиться, решение задачи (13) имеет вид

$$\varphi_0(x)=V\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2\beta-x}}{1-\mathrm{e}^{2\beta}}. \qquad (14)$$

Используя метод разделения переменных, можно построить решение задачи (12) с учетом явного вида функции $\varphi_0(x)$ (14):

$$\varphi(x,t)=V\frac{2\,\mathrm{e}^{2\beta}}{\beta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1}\left(\exp\left(-\frac{t}{1+\lambda_n^2}\right)-1\right)\times$$

$$\times\sin(\lambda_n x)+\varphi_0(x),\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{\beta},\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (15)$$

Можно проверить, что построенное решение является единственным решением задачи (12) в классе непрерывных функций на $[0,\beta]\times[0,+\infty)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\Big([0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(0,\beta)\Big)\ \cap$ $\cap\,\mathbb{C}^{(1)}\Big((0,+\infty);\mathbb{C}^{(2)}(0,\beta)\Big)$.

Проведем качественный анализ полученного решения начально-краевой задачи $\mathbf{D}_1$. Поскольку в эксперименте измерялась объемная плотность заряда в полупроводнике в различные моменты времени (см. [1]), связанная с потенциалом электрического поля уравнением Пуассона (1), то можно перейти к анализу полученного решения для объемной плотности заряда, которое для удобства представим в виде

$$\rho(x,t)=\rho(x,t;N(t))+r(x,t;N(t)), \qquad (16)$$

$$\rho(x,t;N(t))=V\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2}\sum_{n=1}^{N(t)}\frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2+1}\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{t}{1+\lambda_n^2}\right)-1\right)\sin(\lambda_n x)-\frac{\varepsilon}{4\pi r_d^2}\varphi_0(x),$$

$$r(x,t;N(t))=V\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2}\sum_{n=N(t)+1}^{+\infty}\frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2+1}\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{t}{1+\lambda_n^2}\right)-1\right)\sin(\lambda_n x),$$

где $N=N(t)\in\mathbb{N}$ — некоторая функция, определенная при $t\in[0,+\infty)$ и принимающая значения из множества натуральных чисел, конкретный вид которой будет установлен чуть позже. Пусть $t=T>0$ — фиксированный момент времени.

Найдем то значение $z>0$, при котором функция

$$f_T(z)=\frac{z^3}{z^2+1}\left(1-\exp\left(-\frac{T}{z^2+1}\right)\right)$$

принимает максимальное значение. Исследование данной функции показывает, что максимум достигается в единственной точке $z_0=z_0(T)$, определяемой уравнением

$$y=\ln\left(1+2y\frac{T-2y}{T+2y}\right),\quad y=\frac{T}{z^2+1},$$

причем при $T>4$

$$\left(\frac{T-1}{2}\right)^{1/2}\leqslant z_0\leqslant(T-1)^{1/2}, \qquad (17)$$

$$f_T(z_0)\cong\frac{2}{3}T^{1/2}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что для каждого момента времени $t=T$ слагаемое в выражении (16) с номером

$$n=\left[\frac{\beta z_0(t)}{\pi}\right] \qquad (18)$$

в каждой точке $x\in(0,\beta)$ имеет наибольшую абсолютную величину, которая со временем растет, как $\sqrt{t}$; кроме того, для каждого фиксированного момента времени это слагаемое осциллирует по x с частотой, возрастающей со временем t.

Теперь возьмем функцию $N(t)$ в выражении (16) в виде

$$N(t)=\left[\frac{\beta z_0(t)}{\pi}\right]+m, \quad m\in\mathbb{N}. \qquad (19)$$

В силу того, что функция $\varphi_0(x)$ на интервале $(0,\beta)$ положительна, все сказанное выше переносится на первое слагаемое в выражении (16). С другой стороны, поскольку ряд в правой части (16) для функции $r(x,t;N(T))$ сходится равномерно по $(x,t)\in[0,\beta]\times[0,T]$, $0<T<+\infty$, то для каждого фиксированного $0<T<+\infty$ найдется такое натуральное число $m(T)$, что

$$|r(x,t;N(T))|\leqslant V\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2}\exp(-T).$$

Таким образом, на основании модели, предложенной в работе [2], удалось поставить математическую начально-краевую задачу $\mathbf{D}_1$, решение которой дает полное совпадение качественной динамической картины эффекта, наблюдаемого в эксперименте (см. [1]), с результатами исследования решения построенной математической модели. В заключение отметим, что в работе [2] была теоретически исследована аналогичная задача на полупрямой, что позволило качественно выявить наличие слоистой структуры в полупроводнике, однако динамическое развитие эффекта можно детально исследовать только при рассмотрении начально-краевых задач для уравнения составного типа (11) в ограниченных областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00337).

Литература

1. *Астратов В.Н., Ильинский А.В., Киселев В.А.* // ФТТ. 1984. **26**, № 9. С. 2843.
2. *Фурман А.С.* // ФТТ. 1986. **28**, № 7. С. 2083.
3. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. М.: Наука, 1986.
4. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. *Плетнер Ю.Д.* // ЖВМ и МФ. 1992. **32**, № 12. С. 1885.
6. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, № 9. С. 1706.

Поступила в редакцию
09.12.98

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ УПРУГОГО πN-РАССЕЯНИЯ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ НУКЛОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

В. И. Мокеев, М. В. Осипенко

(*НИИЯФ*)

Проведен феноменологический анализ экспериментальных данных реакции упругого πN-рассеяния в области энергий возбуждения нуклонных резонансов. Из условия наилучшего воспроизведения экспериментальных сечений получены нерезонансные амплитуды и фазы интерференции резонансных амплитуд.

Введение

Ускоритель электронов непрерывного действия TJNAF (США), введенный недавно в строй, предоставляет качественно новые возможности в исследовании структуры адронов и динамики сильных взаимодействий в эксклюзивных реакциях. Цель эксперимента E-93-006 [1], проводимого в TJNAF, состоит в определении электромагнитных формфакторов нуклонных резонансов с массами более 1,6 ГэВ, а также поиск missing-резонансов на основе анализа данных по сечениям реакции рождения фотонами пар пионов на протоне. Существует, однако, проблема описания нерезонансных процессов в реакции $\gamma p\to\pi^-\Delta^{++}$, являющейся одним из основных каналов, которые приводят к образованию двух пионов в конечном состоянии. Описание нерезонансных процессов при $W>1{,}6$ ГэВ в условиях конкуренции многих открытых неупругих каналов относится к одной из наиболее сложных проблем исследований структуры высоколежащих резонансов в электромагнитных взаимодействиях. В работах [2, 3] был использован подход [4], включающий коррекцию нерезонансных процессов, вызванную эффектами взаимодействия во входном и выходном каналах. В подходе [2, 3] нерезонансные процессы описывались минимальным набором борновских диаграм.

Как показано в работе [3], эффекты взаимодействия в начальном состоянии (ВНС) и в конечном состоянии (ВКС) играют важную роль в описании реакции $\gamma p\to\pi^-\Delta^{++}$. Если пренебречь вкладами ВНС- и ВКС-эффектов, то при углах эмиссии пиона, больших 90° (в с.ц.м.), и $W>1{,}6$ ГэВ рассчитанные сечения превышают измеренные в несколько раз.