КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 532.517.4

АНАЛИЗ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Комаров, И. О. Стурейко

(*НИИЯФ*)

Предложен квантовомеханический подход к решению гидро- и газодинамических задач о турбулентных течениях вязких сред. Проведен анализ возмущения профиля скорости турбулентного течения в канале, вызванного прерывистым пристеночным слоем. Рассчитаны колебания стенок канала, сопровождающие турбулентное течение.

Проблеме турбулентности потока посвящено большое количество работ, как теоретических, начиная с известных работ А. И. Колмогорова, так и экспериментальных (см. литературу в работе [1]). В последнее время, например, получил развитие масштабно-инвариантный подход [2, 3] и диаграммный метод эмпирического решения уравнения Навье–Стокса [4]. Тем не менее до сих пор практические задачи, связанные с турбулентностью, решаются на основе различных, иногда противоречивых, феноменологических подходов, не имеющих единой теоретической основы.

В настоящей работе предпринята попытка проанализировать одну из конкретных задач возмущения профиля скорости турбулентного потока на основе квантовомеханического подхода, допускающего решение в аналитическом виде.

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости или газа со скоростью $\mathbf{v}$ в плоскопараллельном канале шириной $2R$ с шероховатыми стенками. Шероховатость поверхности канала определяет примыкающую к ней турбулентную область течения толщиной $\pm(R-x_0)$, в которой $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$ (начало координат помещено в центр канала). В остальной области канала течение потенциальное ($\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$). Указанные области разделены некоторой воображаемой границей $x=x_0(z,t)$, где z — координата вдоль оси Oz, совпадающей с направлением движения среды, и t — время.

Предположим, что граница, испытывающая деформации со стороны турбулентного слоя, задана уравнением $x=x_0+\delta(z,t)$, где ось Ox ортогональна к направлению движения. Предположим также, что $|\delta(z,t)|\ll x_0$. Следуя традиционному подходу, представим скорость, давление и плотность жидкости или газа в канале в виде суммы двух компонент: $\mathbf{v}=v_0\mathbf{e}_z+v'$, $p=p_0+p'$, $\rho=\rho_0+\rho'$, где $\mathbf{v}_0$, p_0, ρ_0 — усредненные компоненты и $\mathbf{v}'$, p', ρ' — пульсационные добавки. В области потенциального течения будем считать малыми возмущения скорости: $|\mathbf{v}'|\ll|v|$ и возмущения плотности: $\rho'\ll\rho_0$. Наша задача состоит в нахождении функции возмущения скорости $\mathbf{v}'$ в зависимости от вида (формы) границы турбулентного слоя.

Как известно, движение жидкости в потенциальной области при постоянном давлении описывается нестационарными уравнениями Прандтля

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_t=\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_a\nabla_a v_z\Big)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

(μ — коэффициент трения), которые с учетом возмущения принимают вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho'}{\partial t}+v\frac{\partial\rho'}{\partial z}+\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}'=0,\\&\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}'_z}{\partial t}=-a_0^2\nabla p'\end{aligned}\tag{1}$$

с граничным условием $a_0^2\rho'(\pm|R-x_0|,z,t)=\overline{p'_\pm}(z,t)$, где $a_0=\nabla(p_0/p')+1$, $-(R-x_0)<x<(R-x_0)$.

Рассматриваемую задачу анализа возмущения профиля скорости будем решать с помощью квантовомеханического подхода. Для этого определим пульсационную компоненту скорости $\mathbf{v}$ в виде $\mathbf{v}'=\boldsymbol{\nabla}\varphi$, где φ — функция потенциала скорости, удовлетворяющая граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=\pm(R-x_0)}=\frac{\partial\delta}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\delta}{\partial z}=\Delta_0(z,t).\tag{2}$$

Тогда на основании (1) уравнение для φ может быть представлено в виде

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\mathbf{v}}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\tag{3}$$

с граничными условиями (2).

Выделим в функции φ часть, зависящую от формы границы турбулентного слоя. Для этого представим функцию φ следующим образом: $\varphi=\Delta_0x+\Phi$ и подставим ее в уравнение (3). Для функции Φ получаем теперь уравнение

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\mathbf{v}}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=xf_0(z,t) \qquad (4)$$

с граничным условием $(\partial\Phi/\partial x)_{x=\pm(R-x_0)}=0$, где

$$f_0=\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial z^2}-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial t^2}-\frac{v}{a_0^2}\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial t\partial z}. \qquad (5)$$

Для решения уравнения (4) при $f_0\neq 0$ необходимо найти его решение при $f_0=0$. Эта задача имеет также и самостоятельное значение, так как соответствует заданию определенной деформации границы турбулентного слоя $\delta(z,t)$, например в виде линейной функции от z и t: $\delta(z,t)=kzt$.

Решение уравнения (4) для $f_0=0$ ищем в виде $\Phi_0=\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{e}^{ikz}\,g(x)$. Подстановка Φ_0 в (4) приводит к уравнению для функции $g(x)$: $(d^2g/dx^2)+\lambda^2 g=0$, $\lambda=\omega^2/a_0^2-(v/a_0^2)\omega k-k^2$, с граничным условием $(dg/dx)_{x=\pm(R-x_0)}=0$. Здесь k — некоторый параметр задачи (действительное число). Решая эту задачу на собственные значения, получаем

$$g(x)=\left\{g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{R-x_0}}\cos\left(\frac{\pi n}{2(R-x_0)}x-\frac{\pi n}{2}\right)\right\},$$

при этом $\lambda=\{\lambda_n\}$, $n\in 1,\ldots,\infty$.

Отсюда следует, что функция потенциала возмущения профиля скорости Φ_0 также может принимать различные значения из множества $\{\Phi_n=\mathrm{e}^{i\omega(\lambda_n)t}\,\mathrm{e}^{ikz}\,g_n(x)\}$ и $\omega(\lambda_n)$ может принимать дискретные значения. При фиксированных параметрах a_0 и k изменения Φ_0 происходят при дискретных изменениях скорости потока $\mathbf{v}$.

Решение задачи в общем случае при $f_0\neq 0$ ищем в виде

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_n\varphi_{nk}\,dk, \qquad (6)$$

где функции $\varphi_{nk}=(1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{ikz}\,g_n(x)$ нормированы условием $\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-(R-x_0)}^{(R-x_0)}dx\,\varphi_{nk}^*\varphi_{mk'}=\delta(k-k')\delta_{nm}$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Таким образом, в выбранном подходе нахождение потенциала возмущения профиля скорости потока сводится к определению функций C_n. Подставим C_n в виде $C_n=\exp\{-(i/2)vkt\}\alpha_n$, где $\alpha_n^*(k,t)=\alpha_n(-k,t)$. Для определения $\alpha_n(k,t)$ из уравнения (3) получаем

$$\begin{gathered}\frac{d^2\alpha_n}{dt^2}+\left[(a_0k)^2+(a_0\lambda_n)^2+\left(\frac{vk}{2}\right)^2\right]\alpha_n=\\=\exp\{(i/2)vkt\}f_{nk}=\widetilde{f}_{nk}(t).\end{gathered} \qquad (7)$$

Вводя вещественные функции q_{nk} и p_{nk}, однозначно выражающиеся через α_{nk}^* и α_{nk} при фиксированном k, и проводя несложные преобразования, представляем уравнение (7) в виде

$$\frac{dq_{nk}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{nk}},$$

$$H=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dk\left[\frac{p_{nk}^2}{2m}+m\frac{\Omega_n^2}{2}q_{nk}^2-\gamma m\,\mathrm{Re}\,\widetilde{f}q_{nk}\right],$$

где H — функция Гамильтона системы осцилляторов во внешнем поле.

Как и любую динамическую систему, ее можно проквантовать, полагая p_{nk} и q_{nk} операторами, удовлетворяющими соотношениям $[\hat{q}_{nk},\hat{q}_{n'k'}]=0$, $[\hat{p}_{nk},\hat{p}_{n'k'}]=0$, $[\hat{q}_{nk},\hat{p}_{n'k'}]=i\hbar\hat{I}\delta_{nn'}\delta(k-k')$, где $\hbar$ — постоянная Планка. В результате для определения потенциала скорости можно применить уравнение Шрёдингера $i\hbar(\partial|\phi\rangle/\partial t)=\hat{H}|\phi\rangle$. В этом случае операторами становятся и потенциал скорости, и само поле скоростей, представимые с помощью операторов $\hat{q}_{nk}$, $\hat{\alpha}_{nk}$ в виде

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[&\int_0^{\infty}dk\exp\left\{-i\frac{vk}{2}t\right\}\hat{\alpha}_{nk}\frac{\exp\{ikz\}}{\sqrt{2\pi}}g_{nk}(x)+\\&+\int_{-\infty}^{0}dk\exp\left\{-i\frac{vk}{2}t\right\}\hat{\alpha}_{nk}\frac{\exp\{ikz\}}{\sqrt{2\pi}}g_{nk}(x)\Bigg]=\\=\sum_{n=0}^{\infty}&\int_0^{\infty}dk\cdot 2\cos k\left(z-\frac{vt}{2}\right)\hat{q}_{nk}g_n(x),\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{v}}=\boldsymbol{\nabla}\hat{\Phi},$$

$$\hat{v}_z=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dk\cdot 2\sin k\left(z-\frac{vt}{2}\right)\hat{q}_{nk}g_n(x),$$

$$\hat{v}_x=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dk\cdot 2\cos k\left(z-\frac{vt}{2}\right)\hat{q}_{nk}\frac{dg_n(x)}{dx}.$$

Заметим, что компоненты поля коммутируют: $[\hat{v}_x,\hat{v}_z]=0$. Собственные функции оператора $\hat{H}$, определенные из уравнения $\hat{H}|\phi_n\rangle=E|\phi_n\rangle$, не являются собственными для оператора $\hat{\mathbf{v}}$, поэтому можно говорить лишь о среднем значении скорости: $\langle\phi_n|\hat{v}_x|\phi_n\rangle$ и о ее флуктуациях: $\langle\phi_n|\hat{v}_x^2|\phi_n\rangle$.

Полученные результаты позволяют анализировать рассматриваемую задачу в конкретных случаях, в том числе и с выходом за рамки предположений о несжимаемости и бесструктурности жидкости.

Нами был проведен расчет потенциала пульсационной компоненты скорости в предположении, что $f_0=0$ и что граница пристеночного слоя выбрана в виде $\delta(z,t)=kzt$, $1\leqslant z\leqslant L$, $1\leqslant t\leqslant T$, где k — коэффициент пропорциональности, L и T — пространственный и временной периоды соответственно. Результаты расчета для функции $\Delta_0(z,t)$ пред-

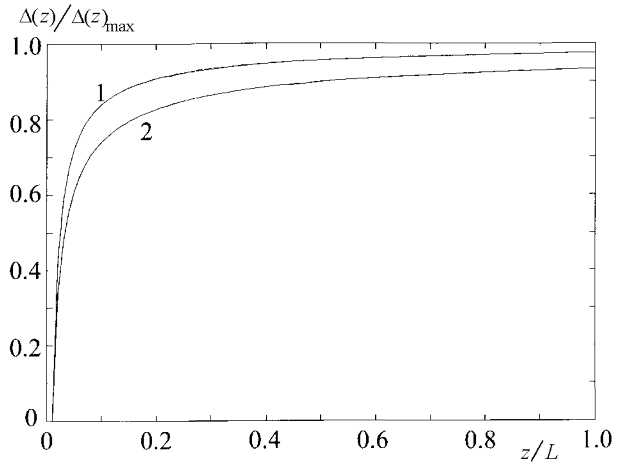

Рис. 1. Зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от координаты z при фиксированном t, рассчитанная в предположении линейных граничных условий (кривая *1*) и определенная экспериментально [5] (кривая *2*)

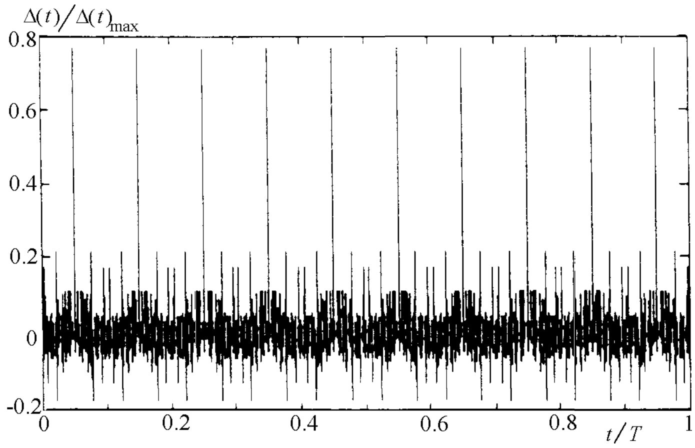

Рис. 2. Рассчитанная зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от времени при фиксированном z

ставлены на рис. 1 (при фиксированном t) и рис. 2 (при фиксированном z). На рис. 1 для сравнения приведен профиль, определенный экспериментально в работе [5]. Расчетные и экспериментальные данные неплохо согласуются друг с другом. Из рис. 2 следует, что присутствие прерывистого пристеночного турбулентного слоя приводит к пульсациям поперечной компоненты скорости у стенки канала. Таким образом, по характеру колебаний стенки канала можно судить о виде турбулентного пристеночного слоя.

Авторы благодарны В. С. Потапову за обсуждение постановки задачи и методов решения и А. М. Поповой и А. И. Васкину за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. *Frisch U.* Turbulence. Cambridge University Press, 1996.
2. *L'vov V.S.* // Phys. Reports. 1991. **207**. P. 1.
3. *Lumley J.L.* // Phys. Fluids. 1992. **A4**. P. 203.
4. *Kraichnan R.H.* // J. Math. Phys. 1961. **2**. P. 124.
5. *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford (California). 1982.

Поступила в редакцию
11.11.98

УДК 539.171

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА К СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ $|x|^N$

В. Н. Сидоренко

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Рассматривается применение предложенного автором метода моделирующего потенциала для построения энергетического спектра уравнения Шрёдингера с потенциалом вида $|x|^N$. В качестве моделирующего потенциала выбирается потенциал гармонического осциллятора. Приводятся оценки для остаточных членов в нулевом и первом приближениях.

В работе [1] был предложен метод моделирующего потенциала (МП) и рассмотрено его применение к спектральной задаче для уравнения Шрёдингера в общем виде. В настоящей работе дано приложение метода к определению спектра оператора Шрёдингера с потенциалом $|x|^N$. Для этого запишем уравнение Шрёдингера с исходным моделируемым потенциалом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + W(x,E)\Psi(x) = 0, \tag{1}$$

где потенциал $W(x,E) = E - U(x)$, $U(x) = |x|^N$, $N \in R$ и $\Psi(x) \in L_2(R^1)$. Для МП имеем уравнение [1]

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Phi''(y) + \widetilde{W}(y,\widetilde{E})\Phi(y) = 0, \tag{2}$$

где $\widetilde{W}(y,\widetilde{E}) = \widetilde{E} - y^2 + \frac{1}{2}(\hbar^2/2m)\{f(y),y\}$ — МП для исходного потенциала, а

$$\{f(y),y\} = \frac{f'''(y)}{f'(y)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\right)^2 \tag{3}$$

— производная в смысле Шварца [1], причем $\widetilde{E} - y^2 = V(\widetilde{E},y)$ — МП в нулевом приближении.

Уравнение (2) получается из (1) при следующей замене независимой и зависимой переменных (преобразование Лиувилля):