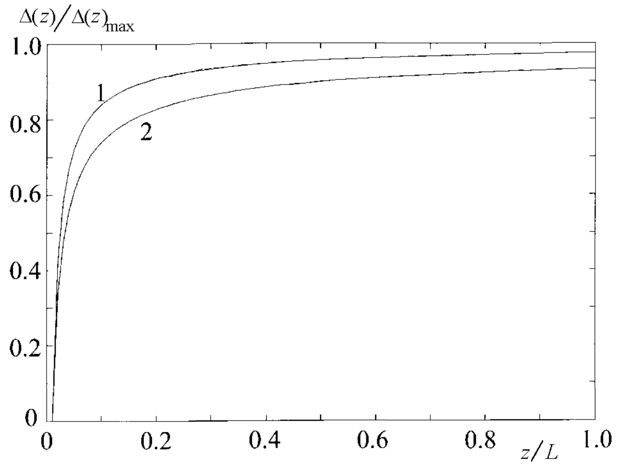

Рис. 1. Зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от координаты z при фиксированном t, рассчитанная в предположении линейных граничных условий (кривая *1*) и определенная экспериментально [5] (кривая *2*)

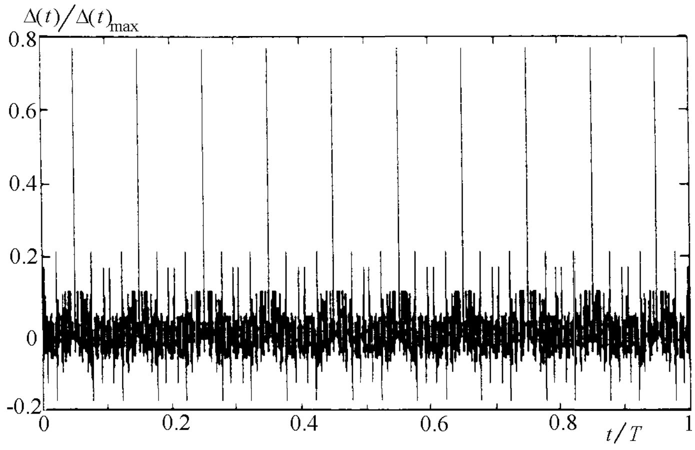

Рис. 2. Рассчитанная зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от времени при фиксированном z

ставлены на рис. 1 (при фиксированном t) и рис. 2 (при фиксированном z). На рис. 1 для сравнения приведен профиль, определенный экспериментально в работе [5]. Расчетные и экспериментальные данные неплохо согласуются друг с другом. Из рис. 2 следует, что присутствие прерывистого пристеночного турбулентного слоя приводит к пульсациям поперечной компоненты скорости у стенки канала. Таким образом, по характеру колебаний стенки канала можно судить о виде турбулентного пристеночного слоя.

Авторы благодарны В. С. Потапову за обсуждение постановки задачи и методов решения и А. М. Поповой и А. И. Васкину за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. *Frisch U.* Turbulence. Cambridge University Press, 1996.
2. *L'vov V.S.* // Phys. Reports. 1991. **207**. P. 1.
3. *Lumley J.L.* // Phys. Fluids. 1992. **A4**. P. 203.
4. *Kraichnan R.H.* // J. Math. Phys. 1961. **2**. P. 124.
5. *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford (California). 1982.

Поступила в редакцию
11.11.98

УДК 539.171

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА К СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ $|x|^N$

В. Н. Сидоренко

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Рассматривается применение предложенного автором метода моделирующего потенциала для построения энергетического спектра уравнения Шрёдингера с потенциалом вида $|x|^N$. В качестве моделирующего потенциала выбирается потенциал гармонического осциллятора. Приводятся оценки для остаточных членов в нулевом и первом приближениях.

В работе [1] был предложен метод моделирующего потенциала (МП) и рассмотрено его применение к спектральной задаче для уравнения Шрёдингера в общем виде. В настоящей работе дано приложение метода к определению спектра оператора Шрёдингера с потенциалом $|x|^N$. Для этого запишем уравнение Шрёдингера с исходным моделируемым потенциалом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + W(x,E)\Psi(x) = 0, \tag{1}$$

где потенциал $W(x,E) = E - U(x)$, $U(x) = |x|^N$, $N \in R$ и $\Psi(x) \in L_2(R^1)$. Для МП имеем уравнение [1]

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Phi''(y) + \widetilde{W}(y,\widetilde{E})\Phi(y) = 0, \tag{2}$$

где $\widetilde{W}(y,\widetilde{E}) = \widetilde{E} - y^2 + \frac{1}{2}(\hbar^2/2m)\{f(y),y\}$ — МП для исходного потенциала, а

$$\{f(y),y\} = \frac{f'''(y)}{f'(y)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\right)^2 \tag{3}$$

— производная в смысле Шварца [1], причем $\widetilde{E} - y^2 = V(\widetilde{E},y)$ — МП в нулевом приближении.

Уравнение (2) получается из (1) при следующей замене независимой и зависимой переменных (преобразование Лиувилля):

$$x=f(y),\quad \frac{d}{dx}=\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy},\qquad \Psi(x)|_{x=f(y)}=\sqrt{f'(y)}\Phi(y). \tag{4}$$

Чтобы замена (4) была взаимно однозначной, необходимо потребовать знакоопределенности функции $f'(y)$. Далее полагаем, что $f'(y)>0$.

В силу симметрии моделирующего и моделируемого потенциалов для действий $S_n(\widetilde{E})$, $S_n(E)$ в нулевом приближении получим следующие выражения:

$$S_n(E)=2\int\limits_0^{x_1}\sqrt{W(x,E)}dx=\frac{2}{N}E_n^{(2+N)/2N}B\left(\frac{1}{N},\frac{3}{2}\right), \tag{5}$$

$$S_n(\widetilde{E})=2\int\limits_0^{y_1}\sqrt{V(y,\widetilde{E})}dy=\frac{1}{2}\pi\widetilde{E}_n, \tag{6}$$

где $x_1=E^{1/N}$ и $y_1=\sqrt{\widetilde{E}}$ — точки поворота, $B(1/N,3/2)$ — B-функция, определяемая как $B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, а $\widetilde{E}_n=2n+1$. В силу условия $S_n(E)=S_n(\widetilde{E})$ [1] из (5), (6) для $E_n(\widetilde{E})$ в нулевом приближении получим

$$E_n(\widetilde{E})=\left[\frac{\pi N}{4}B^{-1}\left(\frac{1}{N},\frac{3}{2}\right)(2n+1)\right]^{2N/(N+2)}. \tag{7}$$

При $N\to\infty$

$$E_n(\widetilde{E})=\left(\frac{\pi}{4}\widetilde{E}_n\right)^2=\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)^2. \tag{8}$$

Теперь оценим величину поправок к спектру $\widetilde{E}_n$ в нулевом и первом приближениях. Подробно они изложены в работе [1]. Так, полагая, что $\widetilde{E}_n$ монотонно зависит от $\widetilde{E}_n^{(0)}$ и представимо в нулевом приближении в виде

$$\widetilde{E}_n=\widetilde{E}_n^{(0)}+R_n^{(0)}, \tag{9}$$

где остаточный член $|R_n^{(0)}|<R_n$, получим следующую оценку сверху для $R_n^{(0)}$ (в системе единиц $\hbar=2m=1$):

$$\left|R_n^{(0)}\right|\leqslant\sqrt{\frac{M}{1-MA(R_n^{(0)})}}\equiv B(R_n^{(0)}), \tag{10}$$

где $M(\widetilde{E})\equiv\frac{1}{4}\max\limits_y\{f(y),y\}^2\geqslant 0$ и $A(R_n^{(0)})=\sum\limits_{m\neq n}\left(\left|\widetilde{E}_n^{(0)}-\widetilde{E}_m^{(0)}\right|-\left|R_n^{(0)}\right|\right)^{-2}$.

Формула (10) справедлива при $MA(R_n^{(0)})\leqslant 1$. В первом приближении, учитывая, что

$$\widetilde{E}_n=\widetilde{E}_n^{(0)}+\frac{1}{2}\{f(y),y\}_{nn}+R_n^{(1)}, \tag{11}$$

где $\{f(y),y\}_{nn}$ — матричный элемент шварциана (3), вычисленный по функциям $\Phi_n(y)$ нулевого приближения, получим следующую оценку сверху для остаточного члена $R_n^{(1)}$:

$$\left|R_n^{(1)}\right|\leqslant\sqrt{\frac{M^2A(R_n^{(0)})}{1-MA(R_n^{(0)})}}=\sqrt{MA(R_n^{(0)})}B(R_n^{(0)}). \tag{12}$$

Определим функцию $A(R_n^{(0)})$ и константу M. Поскольку $\widetilde{E}_n^{(0)}=2n+1$, то функция $A(R_n^{(0)})$ представима в виде

$$A(R_n^{(0)})=\frac{1}{2}\Psi\left(1,1-\frac{R_n^{(0)}}{2}\right)-\frac{1}{4}\Psi\left(1,n+1-\frac{R_n^{(0)}}{2}\right), \tag{13}$$

где $\Psi(n,x)=\Psi^{(n)}(x)$ — Ψ-функция (логарифмическая производная n-го порядка от Γ-функции), а $\Psi(0,x)=\Psi(x)$ [2]. Функция (13) имеет полюсы при $R_n^{(0)}=2k, k\in N$, причем при $R_n^{(0)}\to 0$ ведет себя следующим образом:

$$A(R_n^{(0)})=\left(\tfrac{\pi^2}{12}-\tfrac{1}{4}\Psi(1,n+1)\right)+\left(\frac{1}{2}\zeta(3)+\frac{1}{8}\Psi(2,n+1)\right)R_n^{(0)}+O\left(\left(R_n^{(0)}\right)^2\right), \tag{14}$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана [2]. Считая, что $R_n^{(0)}<1$, получаем ограничение на M следующего вида:

$$M<\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\Psi(1,n+1)\right)^{-1}. \tag{15}$$

Условие (15) выполняется при $n=1,2,3,\ldots$, поскольку

$$M\leqslant\frac{1}{4}\widetilde{E}_n^{-2}<\frac{1}{4}\left(\widetilde{E}_n^{(0)}\right)^{-2}=\frac{1}{4(2n+1)^2}. \tag{16}$$

Численные оценки сверху для $R_n^{(0)}$ и $R_n^{(1)}$ приведены в табл. 1.

В итоге для $\widetilde{E}_n$ в нулевом и первом порядках из (9) и (11) получим следующие выражения:

$$\widetilde{E}_n=(2n+1)+R_n^{(0)},$$
$$\widetilde{E}_n\leqslant(2n+1)+\frac{1}{2(2n+1)}+R_n^{(1)}.$$

Таблица 1

Максимальная величина поправок в нулевом и первом приближениях

R_n	n				
	0	1	2	4	29
$R_n^{(0)}$	0,600	0,168	0,100	0,0556	0,0085
$R_n^{(1)}$	0,331	0,025	0,009	0,0026	0,00006

Таблица 2

Энергетический спектр в нулевом приближении для потенциала $|x|^N$

$U(x)$	E_n	n			
		0	1	2	4
x^4	E_n^{theor}	0,867±0,756	3,752±0,283	7,414±0,198	16,234±0,134
x^4	E_n^{num}	1,060	3,800	7,456	16,262
x^6	E_n^{theor}	0,705±0,820	4,161±0,354	8,954±0,270	21,622±0,201
x^6	E_n^{num}	1,145	4,339	9,073	21,714

Подставляя (10) и (12) в (7), получим аналогичные оценки для спектра E_n. Сравнение энергетического спектра E_n, получаемого из (7) в нулевом приближении, с численными расчетами приведено в табл. 2.

Из таблицы видно, что метод МП в нулевом приближении при $n = 1, 2, 3, \ldots$ с точностью до нескольких процентов дает спектр E_n моделируемого потенциала. Это совпадает с результатами, полученными в рамках обычной квазиклассики. С увеличением n точность быстро возрастает. Так, при $n = 4$ погрешность уменьшается до 0,2%. А поскольку метод МП применим и к потенциалам, близким к сингулярным, то такой точности вполне достаточно для получения качественных оценок структуры спектра.

Литература

1. *Свешников Н.А., Сидоренко В.Н.* // Современные проблемы квантовой теории: Сб. статей: Препр. НИИЯФ МГУ № 98-23/524. М., 1998. С. 235.
2. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
05.03.99

УДК 519.2:534

О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

С. А. Филатова

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Рассматривается подход к проблемам отыскания оптимальных решающих стратегий в условиях неопределенности, базирующийся на аппарате теории многозначных отображений и нечетких множеств.

Нечеткое распределение $X \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ на пространстве $\mathcal{X}$ полностью определяется своей характеристической функцией $\mu_X\colon \mathcal{X} \to \mathbf{I}$, $\mathbf{I} = [0, 1]$. Распределение Y на $\mathcal{Y}$ является образом распределения x, индуцированным отображением $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ [1–4], и обозначается как $Y = fX$, если

$$\mu_Y(y) = \sup_{x: f(x)=y} \mu_X(x) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_X(x),$$
$$\mu_Y(y) = 0, \quad \text{если} \quad f^{-1}(y) = \varnothing.$$

Нечетким переходным распределением, действующим из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, будем называть отображение $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F}(\mathcal{Y})$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ некоторое нечеткое распределение $\alpha x \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ в пространстве $\mathcal{Y}$.

Если $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ и $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, то $\mu_A(x, y) = \mu_{\alpha x}(y)$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $\forall y \in \mathcal{Y}$.

$Y \in \mathcal{Y}$ есть образ распределения X, индуцированный переходным распределением $\alpha\colon Y = \alpha X$, если

а) для **M**-теории: $\mu_Y(y) = \sup\limits_x \min(\mu_X(x), \mu_{\alpha x}(y))$,

б) для **P**-теории: $\mu_Y(y) = \sup\limits_x \mu_X(x) \cdot \mu_{\alpha x}(y)$.

Условные распределения существуют для любого совместного распределения $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$:

а) в **M**-теории: $\mu_{\alpha x}(y) = \mu_A(x, y)$, $\mu_{\beta y}(x) = \mu_A(x, y)$,

б) в **P**-теории:

$$\mu_{\alpha x}(y) = \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x)}, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x) = 0, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\sup\limits_z \mu_A(x,z)}, & \text{если } \mu_A(x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_A(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$\mu_{\beta y}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y)}, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y) = 0, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\sup\limits_z \mu_A(z,y)}, & \text{если } \mu_A(x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_A(x,y) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое фиксированное множество — пространство сигналов (объектов исследования), $\mathcal{D}$ — фиксированное пространство решений (интерпретаций) и на множестве всех пар $\langle x, d\rangle$ $x \in \mathcal{X}$, $d \in \mathcal{D}$ определена функция потерь h, принимающая значения на $[0, \infty)$. Значение $h(x, d)$ определяет качество решения d для данного элемента x. Фактически речь идет об игре двух лиц $\langle \mathcal{D}, \mathcal{X}, h\rangle$, где $\mathcal{D}$ — пространство решений I игрока, $\mathcal{X}$ — пространство решений II игрока, h — функция потерь I игрока.