Таблица 2

Энергетический спектр в нулевом приближении для потенциала $|x|^N$

$U(x)$	E_n	n			
		0	1	2	4
x^4	E_n^{theor}	0,867±0,756	3,752±0,283	7,414±0,198	16,234±0,134
x^4	E_n^{num}	1,060	3,800	7,456	16,262
x^6	E_n^{theor}	0,705±0,820	4,161±0,354	8,954±0,270	21,622±0,201
x^6	E_n^{num}	1,145	4,339	9,073	21,714

Подставляя (10) и (12) в (7), получим аналогичные оценки для спектра E_n. Сравнение энергетического спектра E_n, получаемого из (7) в нулевом приближении, с численными расчетами приведено в табл. 2.

Из таблицы видно, что метод МП в нулевом приближении при $n = 1, 2, 3, \ldots$ с точностью до нескольких процентов дает спектр E_n моделируемого потенциала. Это совпадает с результатами, полученными в рамках обычной квазиклассики. С увеличением n точность быстро возрастает. Так, при $n = 4$ погрешность уменьшается до 0,2%. А поскольку метод МП применим и к потенциалам, близким к сингулярным, то такой точности вполне достаточно для получения качественных оценок структуры спектра.

Литература

1. *Свешников Н.А., Сидоренко В.Н.* // Современные проблемы квантовой теории: Сб. статей: Препр. НИИЯФ МГУ № 98-23/524. М., 1998. С. 235.
2. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
05.03.99

УДК 519.2:534

О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

С. А. Филатова

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Рассматривается подход к проблемам отыскания оптимальных решающих стратегий в условиях неопределенности, базирующийся на аппарате теории многозначных отображений и нечетких множеств.

Нечеткое распределение $X \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ на пространстве $\mathcal{X}$ полностью определяется своей характеристической функцией $\mu_X\colon \mathcal{X} \to \mathbf{I}$, $\mathbf{I} = [0,1]$. Распределение Y на $\mathcal{Y}$ является образом распределения x, индуцированным отображением $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ [1–4], и обозначается как $Y = fX$, если

$$\mu_Y(y) = \sup_{x: f(x)=y} \mu_X(x) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_X(x),$$
$$\mu_Y(y) = 0, \quad \text{если} \quad f^{-1}(y) = \varnothing.$$

Нечетким переходным распределением, действующим из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, будем называть отображение $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F}(\mathcal{Y})$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ некоторое нечеткое распределение $\alpha x \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ в пространстве $\mathcal{Y}$.

Если $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ и $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, то $\mu_A(x,y) = \mu_{\alpha x}(y)$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $\forall y \in \mathcal{Y}$.

$Y \in \mathcal{Y}$ есть образ распределения X, индуцированный переходным распределением α: $Y = \alpha X$, если

а) для **M**-теории: $\mu_Y(y) = \sup_x \min(\mu_X(x), \mu_{\alpha x}(y))$,

б) для **P**-теории: $\mu_Y(y) = \sup_x \mu_X(x)\cdot \mu_{\alpha x}(y)$.

Условные распределения существуют для любого совместного распределения $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$:

а) в **M**-теории: $\mu_{\alpha x}(y) = \mu_A(x,y)$, $\mu_{\beta y}(x) = \mu_A(x,y)$,

б) в **P**-теории:

$$\mu_{\alpha x}(y) = \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x)}, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x) \neq 0,\\ 0, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{X}}A}(x) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\sup\limits_z \mu_A(x,z)}, & \text{если } \mu_A(x,y) \neq 0,\\ 0, & \text{если } \mu_A(x,y) = 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$\mu_{\beta y}(x) = \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y)}, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y) \neq 0,\\ 0, & \text{если } \mu_{p_{\mathcal{Y}}A}(y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\mu_A(x,y)}{\sup\limits_z \mu_A(z,y)}, & \text{если } \mu_A(x,y) \neq 0,\\ 0, & \text{если } \mu_A(x,y) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое фиксированное множество — пространство сигналов (объектов исследования), $\mathcal{D}$ — фиксированное пространство решений (интерпретаций) и на множестве всех пар $\langle x, d\rangle$ $x \in \mathcal{X}$, $d \in \mathcal{D}$ определена функция потерь h, принимающая значения на $[0,\infty)$. Значение $h(x,d)$ определяет качество решения d для данного элемента x. Фактически речь идет об игре двух лиц $\langle \mathcal{D}, \mathcal{X}, h\rangle$, где $\mathcal{D}$ — пространство решений I игрока, $\mathcal{X}$ — пространство решений II игрока, h — функция потерь I игрока.

В случае, если априорная информация о стратегиях противника представлена нечетким множеством X, определим погрешность решения d относительного распределения X для **P**-теории как $h_X(d)=\sup\limits_x \mu_X(x)\cdot h(x,d)$.

Решение d_X X-оптимально (или оптимально относительно априорного распределения X), если оно доставляет минимум функции $h_X(d)$.

Если нечеткий эксперимент описывается нечетким переходным распределением $\alpha\colon \mathcal{X}\to\mathcal{F}(\mathcal{Y})$, то под стратегией решения мы понимаем некоторое отображение r из пространства исходов эксперимента $\mathcal{Y}$ в пространство решений $\mathcal{D}$, $r\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{D}$.

При исследуемом сигнале, равном x, и результате измерения y погрешность решения ry будет равна $h(x,ry)$. Поскольку y при фиксированном x распределено в соответствии с αx, то в качестве функции потерь, отвечающей данному x и данной решающей стратегии r, выбираем $H(x,r)=\sup\limits_y \mu_{\alpha x}(y)\cdot h(x,ry)$. Назовем $H(x,r)$ функцией риска. И мы приходим к новой игре двух лиц $\langle(\mathcal{Y}\to\mathcal{D}),\mathcal{X},H\rangle$.

Задача выбора оптимальной решающей стратегии при наличии априорного распределения X формулируется как задача нахождения отображения r_X, доставляющего минимум функционалу $H_X(r)=\sup\limits_x \mu_X(x)\cdot H(x,r)$.

Т е о р е м а (Байесовский принцип). *Пусть для заданных априорного распределения $X\in\mathcal{F}(\mathcal{X})$ и переходного распределения $\alpha\colon \mathcal{X}\to\mathcal{F}(\mathcal{Y})$, $\beta\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{F}(\mathcal{X})$ является условным распределением относительно $\mathcal{Y}$. Пусть, кроме того, для любого $y\in\mathcal{Y}$ существует решение $d_{\beta y}$ тривиальной задачи, оптимальное относительно распределения βy.*

Тогда оптимальная решающая стратегия r_X и отвечающая ей погрешность $H_X(r_X)$ определяются формулами

$$
\begin{aligned}
&r_X(y)=d_{\beta y},\\
&H_X(r_X)=\sup_y \mu_{\alpha X}(y)\cdot h_{\beta y}(\beta y).
\end{aligned}
$$

Для реализации (вычисления) оптимального отображения r_X при данном результате наблюдения y требуется определить условное распределение x при фиксированном y, т. е. βy, и построить оптимальное решение $d_{\beta y}$ относительно этого распределения.

В **M**-теории функцию потерь $h_X(d)$ относительно априорного распределения X определим как

$$
\begin{aligned}
h_X(d)&=\sup_x \min(\mu_X(x),\mu_C(x,d))=\\
&=\sup_x \min(\mu_X(x),h(x,d)).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Функцию потерь $h_X(d)$ также удобно интерпретировать как нечеткое множество, а именно: как множество C_X решений, «плохих» относительно априорного распределения X, где $\mu_{C_X}(d)=h_X(d)$.

Тривиальная задача принятия решения в **M**-теории состоит в выборе наименее плохого (в смысле C_X) решения $d\in\mathcal{D}$, доставляющего минимум $\mu_{C_X}(d)$. Функция риска вводится следующим образом: $H(x,r)=\sup\limits_y \min(\mu_{\alpha x}(y),h(x,ry))$.

При наличии априорного распределения X

$$
\begin{aligned}
H_X(r)&=\sup_x \min(\mu_X(x)\cdot H(x,r))=\\
&=\sup_x \min(\mu_X(x),\mu_{\sigma x}(r))=\mu_{\sigma X}(r).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Таким образом, H_X определяет нечеткое множество σX плохих стратегий для априорного распределения X.

Задача построения оптимальной стратегии состоит в выборе наименее плохой стратегии, т. е. такого отображения $r_X\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{D}$, степень принадлежности которого к множеству σX минимальна. Решение задачи (2) сводится к решению тривиальной задачи (1) (Теорема).

Задачи точечного оценивания. Пусть $x\in\mathcal{X}$ — объект исследования, $u\colon \mathcal{X}\to\mathcal{D}$ — заданное отображение, и требуется построить оценку элемента ux по результату наблюдения $y\in\mathcal{Y}$ нечеткого эксперимента $\alpha\colon \mathcal{X}\to\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ [5].

Будем считать, что $\mathcal{D}$ — нормированное пространство и определим погрешность оценки d для x как $h(x,d)=\|ux-d\|^2$.

Если d выбирается как функция от y, т. е. $d=ry$ для некоторого отображения $r\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{D}$, то функция риска для отображения r будет равна $H(x,r)=\sup\limits_y \mu_{\alpha x}(y)\cdot\|ux-ry\|^2$.

Задача точечного оценивания с априорной информацией X ставится как задача минимизации по $r\in(\mathcal{Y}\to\mathcal{D})$ функционала

$$
\begin{aligned}
H_X(r)&=\sup_x \mu_X(x)\cdot H(x,r)=\\
&=\sup_x \mu_X(x)\cdot\sup_y \mu_{\alpha x}(y)\cdot\|ux-ry\|^2.
\end{aligned}
$$

Для **P**-теории построение оптимальной оценки r_X сводится к нахождению $d'\in\mathcal{D}$, минимизирующего функционал $h_{\beta y}(d)=\sup\limits_x \mu_{\beta y}(x)\cdot\|ux-d\|^2$.

Обозначим $U=u\beta y$ — образ условного распределения, индуцированный отображением u, и положим

$$
q_U(d)=\sup_t \mu_U(t)\cdot\|t-d\|^2. \tag{3}
$$

Тогда $h_{\beta y}(d)=q_U(d)$.

Элемент d', доставляющий минимум функции (3), естественно назвать центром нечеткого множества U, а величину $q_U(d')$ — размером (или квадратом радиуса) [6]. В самом деле, для четкого множества U выражение для $q_U(d)$ принимает вид $q_U(d)=\sup\limits_{t\in U}\|t-d\|^2$.

Согласно **M**-теории, функция риска для отображения $r\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{D}$ есть $H(x,r)=\sup\limits_y \min(\mu_{\alpha x}(y),\mu_B(\|ux-ry\|))$.

Задача точечного оценивания с априорной информацией X состоит в выборе отображения r_X, минимизирующего функционал

$$H_X(r) = \sup_x \min(\mu_X(x), H(x,r)) =$$
$$= \sup_x \min\left(\mu_X(x), \sup_y \min(\mu_{\alpha x}(y), \mu_B(\|ux - ry\|))\right),$$

и сводится к построению центра нечеткого множества $U = u\beta y$. В **М**-теории центр нечеткого множества U можно определить как точку $d' \in \mathcal{D}$, в которой достигается минимум функционала $q_U(d) = \sup_t \min(\mu_U(t), \mu_B(\|ux - ry\|))$.

Литература

1. Zadeh L.A. // Information and Control. 1965. **8**. P. 338.
2. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
3. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой информации. М.: Наука, 1981.
4. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. N.Y.: Academic Press, 1979.
5. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 1).
6. *Голубцов П.В., Филатова С.А.* // Матем. моделирование. 1992. **4**, № 7. С. 79.

Поступила в редакцию
03.09.99

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 621.484.6

ЭФФЕКТИВНЫЙ КОМПАКТНЫЙ ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЙ ИСТОЧНИК МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С УМЕРЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ

В. К. Гришин, С. П. Лихачев, Н. Н. Насонов

(*НИИЯФ*)

Предлагается новая схема эффективного компактного перестраиваемого монохроматического источника рентгеновского излучения. Излучение генерируется электронами с умеренно релятивистской энергией (2–5 МэВ), многократно пересекающими тонкую кристаллическую мишень, помещенную в специальное магнитное поле. С помощью метода компьютерного моделирования показано, что практически возможна схема создания магнитного поля, обеспечивающая стабильную циркуляцию и вывод электронов. Представлены оценки возможных параметров реального устройства.

В целях создания источника квазимонохроматических рентгеновских и гамма-фотонов активно исследуется параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) релятивистских электронов в кристалле [1–3]. Однако существенным недостатком ПРИ является относительно небольшая его интенсивность. Во многом это связано с необходимостью использовать на практике тонкие мишени. Действительно, повышение толщины мишени приведет как к увеличению угловой дисперсии электронов (возможное угловое расхождение частиц не может превышать угол раствора конуса потока излучения, величина которого по порядку равна обратной величине лоренц-фактора электронов), так и к сильному поглощению излучаемых фотонов в веществе самой мишени. В настоящей работе анализируется возможность создания эффективного источника рентгеновского излучения, в котором генерирующие ПРИ электроны многократно пересекают тонкую кристаллическую мишень.

Экспериментальная схема установки представлена на рис. 1. Электронный пучок инжектируется через специальный канал в рабочий объем вакуумной камеры с кристаллической мишенью. Электроны циркулируют в магнитном поле, неоднократно пересекая

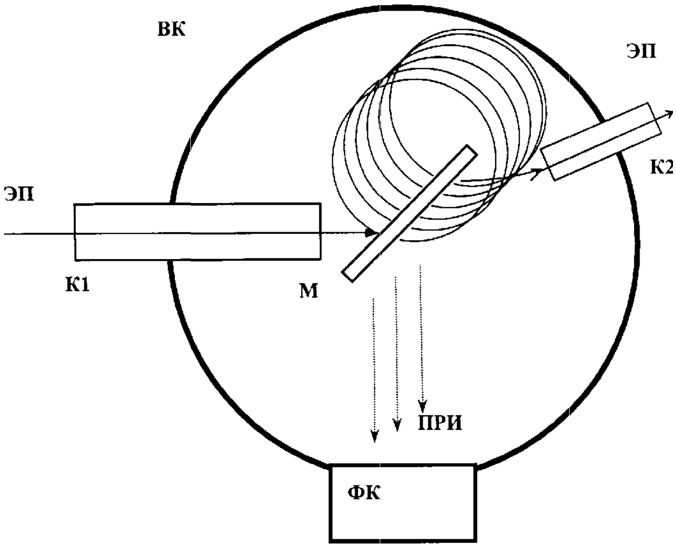

Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *ВК* — вакуумная камера, *М* — кристаллическая мишень, *ЭП* — электронный пучок, *ФК* — канал выхода ПРИ фотонов, $K1$ и $K2$ — каналы ввода и вывода электронов

мишень, и одновременно смещаются вдоль мишени. Затем они выводятся через выходной канал. ПРИ,