ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:517.958

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛА К ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ С ПОСТОЯННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. И. Григорьев, И. П. Денисова

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Решена задача о взаимодействии сферической гравитационной волны с постоянным электромагнитным полем. Найдены выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, углового распределения и полной интенсивности возникающего в этом взаимодействии электромагнитного излучения.

При распространении гравитационных волн во внешних электромагнитных полях в результате взаимодействия возникает электромагнитное излучение. Этот процесс в настоящее время рассматривается как один из основных процессов, с помощью которых предполагается проводить регистрацию гравитационных волн в лабораторных и астрофизических условиях.

Как показывают расчеты, в области высоких частот излучатели и детекторы электромагнитного типа оказываются более эффективными по сравнению с механическими системами. Поэтому перспективы овладения радио-, СВЧ и оптическим диапазонами гравитационно-волнового канала связи во многом будут зависеть от успехов в разработке излучателей и детекторов гравитационных волн.

Однако в математическом плане вопросы превращения гравитационных волн в электромагнитные оказались недостаточно разработанными. Это связано в первую очередь с чрезвычайной громоздкостью рассматриваемых уравнений и отсутствием общих методов решения таких задач. В работе [1] для расчета взаимодействия гравитационных волн со стационарными электромагнитными полями было предложено использовать метод потенциалов, во многом аналогичный методу потенциала в электродинамике [2].

Используя этот метод, найдем решение задачи для важного частного случая взаимодействия сферической гравитационной волны с постоянным и однородным электромагнитным полем.

Предположим, что в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ расположен источник слабых сферических гравитационных волн. Пусть этот источник излучает гравитационную волну, компоненты которой в TT-калибровке имеют вид

$$\Phi^{\alpha\beta}=\hat{\Psi}^{\alpha\beta}\frac{\exp[i(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|-\omega t)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \qquad (1)$$

где $\hat{\Psi}^{\alpha\beta}$ — операторы дифференцирования по координатам точки $\mathbf{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$.

Явный вид этих операторов зависит от мультипольности гравитационного излучения, его поляризации и ориентации диаграммы направленности. В одном из простейших случаев эти операторы содержат частные производные 3-го порядка:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Psi}^{11}=-\frac{2\Psi_0}{k^4}\frac{\partial^3}{\partial x_0\partial y_0\partial z_0},\\
&\hat{\Psi}^{12}=\frac{\Psi_0}{k^4}\left(\frac{\partial^3}{\partial z_0^3}+\frac{\partial^3}{\partial x_0^2\partial z_0}\right),\\
&\hat{\Psi}^{13}=\frac{\Psi_0}{k^4}\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0\partial x_0^2}-\frac{\partial^3}{\partial z_0^2\partial y_0}\right),\\
&\hat{\Psi}^{23}=-\frac{\Psi_0}{k^4}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3}+\frac{\partial^3}{\partial x_0\partial z_0^2}\right),\\
&\hat{\Psi}^{33}=-\hat{\Psi}^{11},\ \hat{\Psi}^{22}=0.
\end{aligned} \qquad (2)$$

В системе координат, начало которой помещено в точку $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, диаграмма направленности гравитационного излучения имеет вид

$$\overline{\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{GW}}=\frac{c^5\Psi_0^2}{32\pi G}\frac{(x^2+z^2)^2}{r^4}.$$

Таким образом, излучение максимально в плоскости xOz и отсутствует в направлении оси y.

Предположим далее, что эта сферическая гравитационная волна распространяется в постоянном и однородном электромагнитном поле, напряженности которого обозначим через $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$.

Потенциалы φ и $\mathbf{A}$ возникающей электромагнитной волны в первом порядке теории возмущений удовлетворяют уравнениям

$$\Box A^m_{(0)}=-\frac{4\pi}{c}j^m_{(0)},\quad \Box A^m_{(1)}=-\frac{4\pi}{c}j^m_{(1)}-j^m_{int}, \qquad (3)$$

где использованы следующие обозначения:

$$j^0_{int}=-\operatorname{div}\mathbf{P},\quad \mathbf{j}_{int}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x^0}+\operatorname{rot}\mathbf{M},$$

$$P^\alpha = \Phi^{\alpha\beta} E_\beta^{(0)}, \quad M^\alpha = \Phi^{\alpha\beta} H_\beta^{(0)}.$$

Вводя электрический $\mathbf{\Pi}$ и магнитный $\mathbf{Z}$ векторы Герца, удовлетворяющие соотношениям

$$\varphi_{(1)} = -\mathrm{div}\ \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{A}_{(1)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \mathrm{rot}\ \mathbf{Z}, \tag{4}$$

из уравнений (3) получим

$$\Box\ \Pi^\alpha = -\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) E_\beta^{(0)}, \quad \Box\ Z^\alpha = -\Phi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) H_\beta^{(0)}.$$

Решение этих уравнений удобно искать в виде

$$\Pi^\alpha = E_\beta^{(0)} \hat{\Psi}^{\alpha\beta} W(t, \mathbf{r}), \quad Z^\alpha = H_\beta^{(0)} \hat{\Psi}^{\alpha\beta} W(t, \mathbf{r}), \tag{5}$$

а суперпотенциал $W(t, \mathbf{r})$ можно определить из более простого уравнения:

$$\Box\ W(t, \mathbf{r}) = -\frac{\exp[i(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \omega t)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Запаздывающее решение этого уравнения имеет вид

$$W(t, \mathbf{r}) = \frac{i}{2k}\exp[i(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \omega t)]. \tag{6}$$

Используя выражения (2) и (4)–(6) и полагая после дифференцирования $\mathbf{r}_0 = 0$, для компонент электромагнитной волны, возникающей в результате воздействия сферической гравитационной волны (1) с постоянным и однородным электромагнитным полем, получим следующие выражения (оставлены только асимптотически главные члены):

$$\mathbf{E} = \frac{\Psi_0}{2r^4}\Big\{r\mathbf{F} - [\mathbf{r} \times \mathbf{Q}]\Big\}\exp[i(kr - \omega t)],$$

$$\mathbf{H} = \frac{\Psi_0}{2r^4}\Big\{r\mathbf{Q} + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]\Big\}\exp[i(kr - \omega t)],$$

где

$$F_x = 2xyzE_x^{(0)} - z(x^2 + z^2)E_y^{(0)} - y(x^2 - z^2)E_z^{(0)},$$

$$F_y = (xE_z^{(0)} - zE_x^{(0)})(x^2 + z^2),$$

$$F_z = y(z^2 - x^2)E_x^{(0)} + x(x^2 + z^2)E_y^{(0)} - 2xyzE_z^{(0)},$$

$$Q_x = 2xyzH_x^{(0)} - z(x^2 + z^2)H_y^{(0)} - y(x^2 - z^2)H_z^{(0)},$$

$$Q_y = (xH_z^{(0)} - zH_x^{(0)})(x^2 + z^2),$$

$$Q_z = y(z^2 - x^2)H_x^{(0)} + x(x^2 + z^2)H_y^{(0)} - 2xyzH_z^{(0)}.$$

Из этих выражений следует, что амплитуда рожденной электромагнитной волны при удалении от источника гравитационных волн $(r \to \infty)$ в рассматриваемом случае стремится к постоянной величине.

Интенсивность же излучения в элемент телесного угла растет квадратично:

$$\overline{\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)}_{EMW} =$$

$$= \frac{c\Psi_0^2[x^2 + z^2]^2}{32\pi r^4}\left\{[\mathbf{r} \times \mathbf{E}^{(0)}] + \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{H}^{(0)}]\right]\right\}^2. \tag{7}$$

Из этого выражения следует, что

$$\frac{\overline{(dI/d\Omega)}_{EMW}}{\overline{(dI/d\Omega)}_{GW}} = \frac{G}{c^4}\left\{[\mathbf{r} \times \mathbf{E}^{(0)}] + \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{H}^{(0)}]\right]\right\}^2.$$

Это означает, что основная часть рожденного электромагнитного излучения распространяется в направлениях, перпендикулярных векторам $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ внешнего электромагнитного поля. Из выражения (7) получим полную интенсивность:

$$\overline{I} = \frac{2c\Psi_0^2 r^2}{105}\Big\{2[\mathbf{E}_{(0)}^2 + \mathbf{H}_{(0)}^2] + E_{(0)y}^2 + H_{(0)y}^2\Big\}.$$

Таким образом, полная интенсивность электромагнитного излучения в этом процессе пропорциональна квадрату характерного размера области, занятой электромагнитным полем. Вполне очевидно, что обнаружить рождение электромагнитных волн в лабораторных масштабах, даже с использованием сверхсильных магнитных полей, невозможно.

Поэтому необходимо использовать межзвездные электромагнитные поля, которые хотя и являются слабыми, но занимают области пространства астрофизических масштабов.

Литература

1. *Denisova I.P., Dalal M.* // J. Math. Phys. 1997. **38**, No. 11. P. 5820.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
22.01.99