

3. Das K.P., Verheest F. // J. Plasma Phys. 1989. **41**. P. 139.
4. Seyler C.I. // J. Geophys. Res. 1990. **A95**. P. 17199.
5. Frycz P., Rankin R., Samson J.C. // J. Plasma Phys. 1992. **48**. P. 335.
6. Bernstein I.B., Green J.M., Kruskal M.D. // Phys. Rev. 1957. **108**. P. 546.
7. Гуревич А.В. // ЖЭТФ. 1967. **53**. С. 951.
8. Алешин И.М., Дрофа М.А., Кузьменков Л.С. // Физическая мысль России. 1994. **1**. С. 15.
9. Алешин И.М., Дрофа М.А., Кузьменков Л.С. // Физика плазмы. 1993. **19**. С. 999; Alechin I.M., Drofa M.A., Kuzmenkov L.S. // J. Plasma Phys. 1994. **51**. P. 177.
10. Захаров В.Е., Карпман В.И. // ЖЭТФ. 1962. **43**. С. 490.
11. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981.

Поступила в редакцию  
15.02.99

УДК 530.145

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ

К. В. Степаньянц, В. Б. Фокин

(кафедра теоретической физики)

С помощью программы, написанной с использованием системы аналитических вычислений MAPPLE, получены асимптотические разложения точного эффективного действия для  $N = 1$  и  $N = 2$  суперсимметричных моделей в пределах сильной и слабой связи.

### Введение

Исследование непертурбативной динамики теории поля представляет собой одну из наиболее интересных и сложных задач современной теоретической физики. Хорошо известно [1], что квантовые поправки отнюдь не сводятся к ряду теории возмущений. Помимо пертурбативных поправок существуют еще и инстантонные вклады, нумерующиеся значением топологического числа и, следовательно, представляющие собой некоторый ряд. Зайберг и Виттен [2] в простейшем случае  $N = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой  $SU(2)$  явно вычислили его сумму в приближении постоянного поля. Полученный результат выражается через некоторую специальную функцию  $\tau$ , тесно связанную с эллиптическими функциями.

Однако модель Зайберга–Виттена не является физической. Значительно больший интерес представляет исследование  $N = 1$  суперсимметричных теорий, поскольку существуют косвенные экспериментальные данные, подтверждающие существование  $N = 1$  суперсимметрии в стандартной модели. При изучении данных теорий достаточно эффективным оказался метод, основанный на исследовании квантовых аномалий вне рамок теории возмущений [3, 4]. С его помощью в работе [4] было найдено точное выражение для эффективного действия, которое (в отличие от предлагавшихся ранее) согласуется с результатами инстантонных вычислений и квантовыми аномалиями. Результат оказался тесно связанным с решением Зайберга–Виттена, поскольку выражается через ту же самую специальную функцию  $\tau$ , но уже от некоторого другого аргумента. Поэтому данная функция, по-видимому, играет особую роль при исследовании непертурбативной динамики и заслуживает тщательного исследования. Это и является целью настоящей работы.

Наибольший интерес представляют асимптотики функции  $\tau$  в областях сильной и слабой связи, поскольку при слабой связи они дают величины инстантонных поправок. При сильной связи физическое обоснование появления поправок является весьма интересной и до сих пор не решенной проблемой. Однако в силу крайне нетривиальной структуры асимптотик их невозможно вычислить с помощью стандартных программ аналитических вычислений (MAPPLE, MATHEMATICA). Поэтому данная проблема должна быть решена некоторым другим, менее тривиальным способом.

### 1. Точные результаты в суперсимметричных теориях

При исследовании точных результатов простейшей моделью является  $N = 2$  суперсимметричная теория Янга–Миллса с калибровочной группой  $SU(2)$ . Ее эффективное действие в  $N = 2$  суперпространстве может быть представлено в виде

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta_1 d^2\theta_2 F(\Phi), \quad (1)$$

где  $\Phi(x, \theta_1, \theta_2)$  есть  $N = 2$  суперполе, включающее в виде компонент одно векторное, два (майорановских) спинорных и одно (комплексное) скалярное поле. В древесном приближении

$$F(\Phi) = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_0 \Phi^2), \quad (2)$$

где  $\tau_0 = 4\pi i/e^2 + \vartheta/(2\pi)$ ,  $e$  — константа связи, а  $\vartheta$  — коэффициент при топологическом слагаемом.

В пределе низких энергий калибровочная группа  $SU(2)$  нарушается до  $U(1)$  вакуумным средним скалярного поля  $\varphi$ , которое далее будет обозначаться через  $a$ .

Выражение для  $F(\Phi)$  с учетом однопетлевой поправки и инстантонных вкладов в приближении постоянного поля, вычисленное в работе [2], определяется уравнением

$$\frac{dF}{du} = a_D \frac{da}{du},$$

где  $u$  — калибровочно инвариантный параметр, являющийся координатой в пространстве модулей (калибровочно неэквивалентных вакуумов), а функции  $a(u)$  и  $a_D(u)$  записываются в виде

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}; \quad a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^u dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

В терминах  $N = 1$  суперполей голоморфная часть эффективного действия (1) в низкоэнергетическом пределе может быть переписана в виде

$$\Gamma_a = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta W^2 \tau(a),$$

где

$$\tau(a) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = \frac{da_D(a)}{da}. \quad (3)$$

Сравнивая выражения для  $\tau$  и  $\tau_0$ , несложно видеть, что области слабой связи соответствует  $u \rightarrow \infty$ , а области сильной связи —  $u \rightarrow \pm 1$ .

Голоморфная часть суперпотенциала может быть найдена точно и для  $N = 1$  суперсимметричных теорий. С помощью исследования квантовых аномалий вне рамок теории возмущений в работе [4] было получено, что для  $N = 1$  суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой  $SU(N_c)$  и  $N_f$  супермультиплетами материи эффективное действие  $\Gamma_a$  имеет следующий вид:

$$\Gamma_a = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta W^2 \tau(z^{-1/4}), \quad (4)$$

где  $\tau(a)$  определяется выражением (3).

В (3) параметр  $z$  является функцией «мезонов»  $M$  и «барионов»  $B$ , параметризующих пространство модулей рассматриваемой теории<sup>\*</sup>, а также конденсата глюино  $S = W^2$ . В работе [2] получено, что

$$z = \Lambda^{3N_c - N_f} \left[ \det M S^{N_c - N_f} \right]^{-1}, \quad N_c > N_f,$$

$$z = \Lambda^{3N_c - N_f} S^{N_f - N_c} \times \left[ \det M - \left( \tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}} \right) \right]^{-1}, \quad N_c \leq N_f.$$

<sup>\*</sup> Сведения о структуре пространства модулей могут быть найдены в обзорах [5–7].

Выражение (4) согласуется с законом преобразования меры интегрирования по коллективным координатам и квантовыми аномалиями.

Пертурбативная асимптотика (4) совпадает с так называемым эффективным лагранжианом Венециано–Янkelовича [8] (применимого только в рамках теории возмущений).

При  $N_f \geq N_c$  калибровочная группа является полностью нарушенной и конденсат глюино может быть исключен при помощи уравнений движения. В результате данной операции из (4) получаются известные точные результаты [9, 10]. Однако, как показано в работе [11], исключение конденсата невозможно при  $N_c > N_f$ , что связано с существованием ненарушенной калибровочной группы.

## 2. Алгоритм вычисления и его программная реализация

Как уже отмечалось во введении, стандартные системы аналитических вычислений не справляются с нахождением асимптотических разложений функций  $a(u)$ ,  $a_D(u)$  и  $\tau(a)$ . Это связано с тем, что разложение данных функций в особых точках не сводится к степенному ряду. Более строго, при  $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a(u) &= \sqrt{2u} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^{-2k} \right), \\ a_D(u) &= \frac{i}{\pi} \sqrt{2u} \left( (\ln(8u) - 2) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^{-2k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^{-2k} \right), \\ \tau(a) &= \frac{2i}{\pi} \left( \ln(2a) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k a^{-4k} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

а при  $u \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} a(u) &= \frac{4}{\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k (u-1)^k + \ln(u-1) \sum_{k=1}^{\infty} q_k (u-1)^k \right), \\ a_D(u) &= \frac{i}{2} \left( u-1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k (u-1)^{k+1} \right), \\ \tau_D(a_D) &= \frac{i}{\pi} \left( \ln(-ia_D/16) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k (ia_D)^k \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Случай  $u = -1$  аналогичен случаю  $u = 1$ .

Для того чтобы найти коэффициенты данных рядов, мы воспользуемся тем, что функции  $a(u)$  и  $a_D(u)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению [5]

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{4(u^2 - 1)} \right) \begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Поэтому для нахождения асимптотических разложений мы можем воспользоваться следующим методом. В уравнении (7) раскладываем  $1/(u^2 - 1)$  в окрестности исследуемой точки. Затем подставляем

в (7) разложения (5) или (6). Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра  $1/u$  или  $u - 1$  (в зависимости от выбранной точки) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть легко решена, в результате чего определяются асимптотические разложения функций  $a(u)$  и  $a_D(u)$ .

Для нахождения разложений  $\tau(a)$  (или  $\tau_D(a_D)$ ) необходимо знание зависимости  $a_D(a)$  (или  $a(a_D)$ ), поскольку

$$\tau(a) = \frac{da_D(a)}{da}, \quad \tau_D(a_D) = -\frac{da(a_D)}{da_D}. \quad (8)$$

Рассмотрим, например, случай слабой связи. Чтобы получить  $a_D(a)$ , мы обращаем ряд  $a(u)$ , а затем подставляем разложение  $u(a)$  в  $a_D(u)$ , что и дает требуемый результат. Затем функция  $\tau(a)$  вычисляется при помощи (8).

Критерием правильности проведенных вычислений является отсутствие членов типа  $a^{-k} \ln a$  в разложении функции  $\tau$  (см. (5)). Аналогичным образом в области сильной связи вычисляется  $a(a_D)$  и проверяется отсутствие  $a_D^k \ln a_D$ .

Предлагаемый алгоритм реализован с помощью системы аналитических вычислений MAPPLE. Пользователь задает только количество нетривиальных коэффициентов в асимптотических разложениях. Программа вычисляет асимптотические разложения  $a(u)$ ,  $a_D(u)$ ,  $u(a)$ ,  $a_D(a)$ ,  $\tau(a)$  в области слабой связи и  $a(u)$ ,  $a_D(u)$ ,  $u(a_D)$ ,  $a(a_D)$ ,  $\tau_D(a_D)$  в области сильной связи ( $u \rightarrow 1$ ).

### 3. Асимптотические разложения эффективного действия

Задавая количество нетривиальных членов разложения равным 4, получаем следующие асимптотические разложения.

1. В области слабой связи при  $u \rightarrow \infty$ :

$$a(u) \approx \sqrt{2u} \left( 1 - \frac{1}{16}u^{-2} - \frac{15}{1024}u^{-4} - \frac{105}{16384}u^{-6} - \frac{15015}{4194304}u^{-8} \right),$$

$$a_D(u) \approx \frac{i}{\pi} \sqrt{2u} \left( (\ln(8u) - 2) \times \left( 1 - \frac{1}{16}u^{-2} - \frac{15}{1024}u^{-4} - \frac{105}{16384}u^{-6} - \frac{15015}{4194304}u^{-8} \right) - \frac{1}{16}u^{-2} - \frac{13}{2048}u^{-4} - \frac{163}{98304}u^{-6} - \frac{31183}{50331648}u^{-8} \right),$$

$$u(a) \approx a^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a^{-4} + \frac{5}{64}a^{-8} + \frac{9}{128}a^{-12} + \frac{1469}{16384}a^{-16} \right),$$

$$\tau(a) \approx \frac{i}{\pi} \left( 2 \ln(2a) - \frac{3}{4}a^{-4} - \frac{105}{128}a^{-8} - \frac{165}{128}a^{-12} - \frac{154245}{65536}a^{-16} \right). \quad (9)$$

2. В области сильной связи при  $u \rightarrow 1$ :

$$a(u) \approx \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \left( (\ln(u-1) + 4 \ln(2)) \times \left( u-1 - \frac{1}{16}(u-1)^2 + \frac{3}{256}(u-1)^3 - \frac{25}{8192}(u-1)^4 + \frac{245}{262144}(u-1)^5 \right) - \frac{5}{32}(u-1)^2 + \frac{9}{256}(u-1)^3 - \frac{965}{98304}(u-1)^4 \right),$$

$$a_D(u) \approx \frac{i}{2} \left( u-1 - \frac{1}{16}(u-1)^2 + \frac{3}{256}(u-1)^3 - \frac{25}{8192}(u-1)^4 + \frac{245}{262144}(u-1)^5 \right),$$

$$u(a_D) \approx 1 - 2ia_D - \frac{1}{4}a_D^2 - \frac{i}{32}a_D^3 + \frac{5}{512}a_D^4 + \frac{33i}{8192}a_D^5,$$

$$\tau_D(a_D) \approx \frac{i}{\pi} \left( \ln(-ia_D) - 4 \ln(2) - \frac{3i}{8}a_D + \frac{15}{128}a_D^2 + \frac{55i}{1024}a_D^3 - \frac{945}{32768}a_D^4 \right). \quad (10)$$

Графики функций  $a(u)$ ,  $\text{Im } a_D(u)$ ,  $\text{Im } \tau(a)$ ,  $\text{Im } \tau(z^{-1/4})$  и  $\text{Im } \tau_D(\text{Im } a_D)$  показаны на рис. 1–5. Для сравнения на графиках приводятся пертурбативные асимптотики, а для физически наиболее важных функций  $\tau(a)$  и  $\tau_D(a_D)$  — также и пертурбативные асимптотики с первой нетривиальной поправкой в области слабой связи.

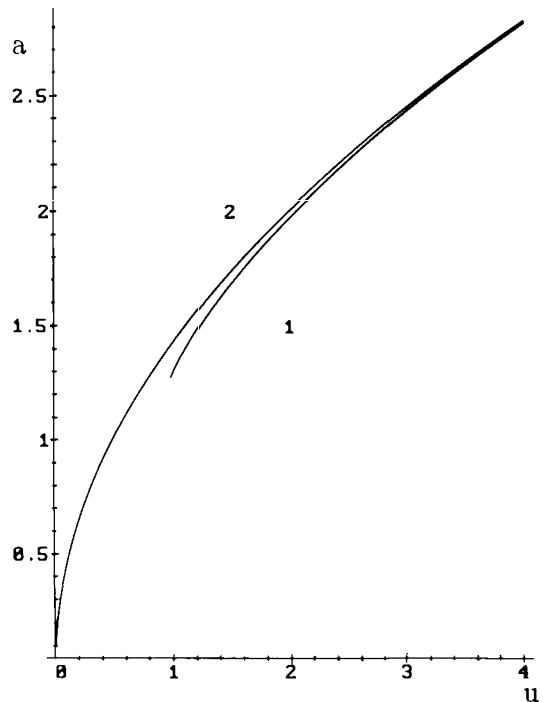


Рис. 1. График функции  $a(u)$  (1) и ее пертурбативная асимптотика (2)

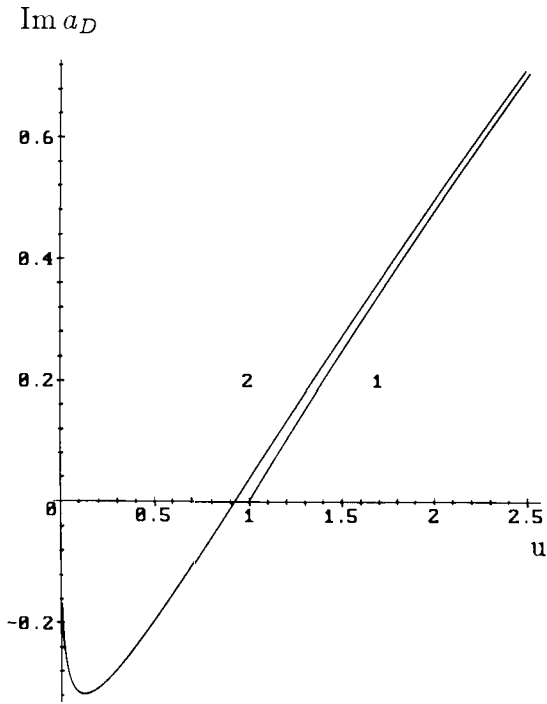


Рис. 2. График функции  $\text{Im } a_D(u)$  (1) и ее пертурбативная асимптотика (2)

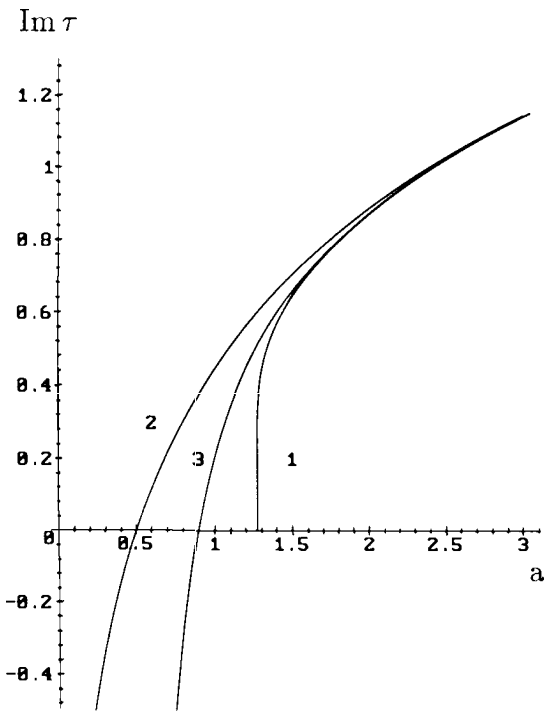


Рис. 3. График функции  $\text{Im } \tau(a)$  (1), ее пертурбативная асимптотика (2) и пертурбативная асимптотика с низшей поправкой (3)

### Заклучение

В работе проведено исследование точных результатов в  $N = 2$  и  $N = 1$  суперсимметричных теориях на основе специальной программы, вычисляющей их асимптотические разложения в областях слабой и сильной связи.

Наиболее важны выражения для  $\tau(a)$  и  $\tau_D(a_D)$ . Действительно, в первом случае члены разложения

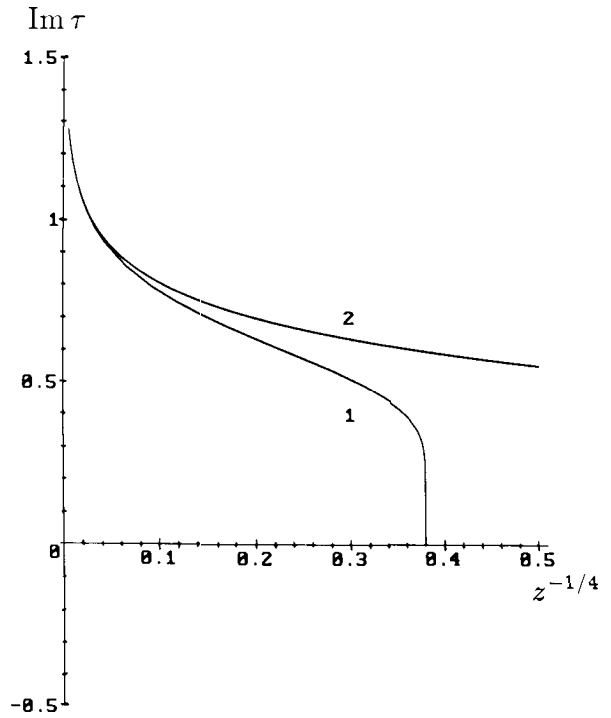


Рис. 4. График функции  $\text{Im } \tau(z^{-1/4})$  (1) и ее пертурбативная асимптотика (2)

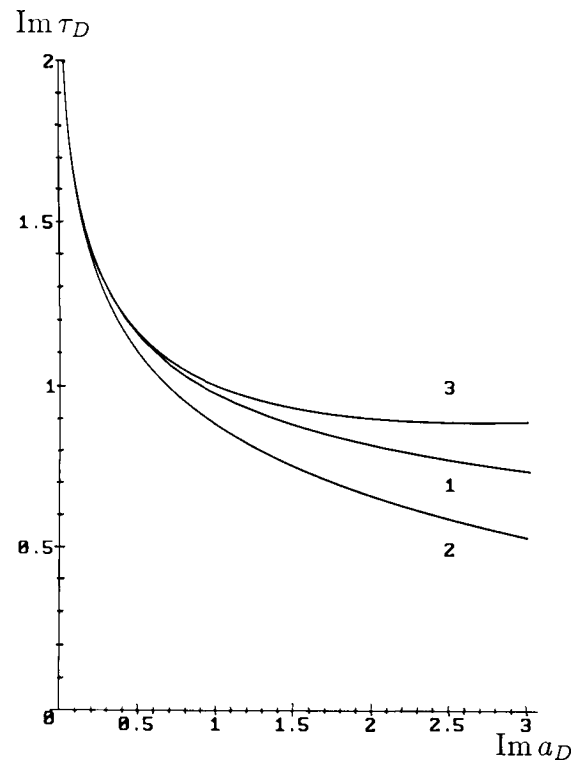


Рис. 5. График функции  $\text{Im } \tau_D(\text{Im } a_D)$  (1), ее пертурбативная асимптотика (2) и пертурбативная асимптотика с низшей поправкой (3)

представляют собой инстантонные поправки в области слабой связи, которые можно сравнивать с результатами прямых инстантонных вычислений. Во втором случае, для сильной связи, физическая причина возникновения поправок неизвестна даже в модели Зайберга–Виттена, и полученные результаты

могут быть использованы при попытках найти эту причину.

Остальные разложения также могут быть использованы при тщательном изучении структуры суперсимметричных теорий вне рамок теории возмущений.

Авторы глубоко признательны П. И. Пронину за полезные обсуждения и замечания, а также В. В. Асадову за финансовую поддержку исследований.

**Литература**

1. *t'Hoofst G.* // Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 3432.
2. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. 1994. **B426**. P. 19.
3. *Пронин П.И., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 1998. **115**. С. 402.

4. *Pronin P., Stepanyantz K.* // E-print Archive: hep-th/9803185.
5. *Bilal A.* // E-print Archive: hep-th/9601007.
6. *Alvares-Gaume L., Hassan S.* // Fortschr. Phys. 1997. **45**. P. 159.
7. *Klemm A.* // E-print Archive: hep-th/9705131; *Peskin M.* // E-print Archive: hep-th/9702094.
8. *Veneziano G., Yankelowicz S.* // Phys. Lett. 1982. **B113**. P. 231; *Taylor T., Veneziano G., Yankelowicz S.* // Nucl. Phys. 1983. **B218**. P. 493.
9. *Affleck I., Dine M., Seiberg N.* // Nucl. Phys. 1984. **B241**. P. 493.
10. *Seiberg N.* // Phys. Rev. 1994. **D49**. P. 6857.
11. *Pronin P., Stepanyantz K.* // E-print Archive: hep-th/9902163.

Поступила в редакцию  
17.02.99

УДК 538.915; 539.01.1

**О МНОЖЕСТВЕ УНИКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАФЛИНА**

**Б. А. Лысов, О. Ф. Дорофеев**

(кафедра теоретической физики)

Показано, что для определенных соотношений между индукцией магнитного поля и величиной заряда электрона в задаче коррелированного движения двух электронов в постоянном и однородном магнитном поле существуют точные решения в виде элементарных функций (уникальные лафлиновские состояния). Приведен ряд соображений, позволяющих понять физический смысл этих замечательных значений магнитного поля. Интерес к этой задаче связан с новым состоянием вещества, обнаруженным экспериментально.

Рассмотрим двумерное движение двух электронов в постоянном и однородном магнитном поле. В этой задаче движение центра масс отделяется от относительного движения.

Стационарное уравнение Шрёдингера для относительного движения (задача Лафлина) имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{m^*} \left[ \left( \hat{p}_x - \frac{eB}{4c} \hat{y} \right)^2 - \left( \hat{p}_y + \frac{eB}{4c} \hat{x} \right)^2 \right] + \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \Psi = E\Psi. \tag{1}$$

Здесь  $m^*$  — эффективная масса электрона в данной гетероструктуре,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $B$  — индукция магнитного поля. Использована симметричная калибровка векторного потенциала

$$\mathbf{A} = -\frac{B}{2} y \mathbf{e}_x + \frac{B}{2} x \mathbf{e}_y + \frac{B}{2} r \mathbf{e}_\varphi. \tag{2}$$

Уравнение (1) формально является уравнением Шрёдингера для частицы с массой  $m^*/2$ , зарядом  $-e/2$ , которая взаимодействует с однородным магнитным полем (2) и неподвижным зарядом  $-2e$ , помещенным в начало координат.

Уравнение (1) целесообразно переписать в безразмерных переменных. Для этого введем магнитную длину  $l_B = \sqrt{2\hbar c / (eB)}$  и безразмерное собственное значение энергии  $\lambda = 2E / (\hbar\omega_c)$ , где  $\omega_c = eB / (m^*c)$  — циклотронная частота. Полагая теперь

$$x = l_B \xi, \quad y = l_B \eta, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

перепишем уравнение (1)

$$\left[ \left( \hat{p}_\xi - \frac{1}{2} \hat{\eta} \right)^2 + \left( \hat{p}_\eta + \frac{1}{2} \hat{\xi} \right)^2 + \frac{a}{\rho} \right] \Psi = \lambda \Psi. \tag{3}$$

Здесь  $a = \sqrt{B_0/B}$  и  $B_0 = 2cm^*e^3/\hbar^3 \simeq 4,7 \times 10^9 (m^*/m)^2$  — индукция критического поля. В полярных координатах уравнение (3) принимает вид

$$\left[ -\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{a}{\rho} \right] \Psi = \lambda \Psi.$$

Волновую функцию ищем в виде

$$\Psi = \exp(i l \varphi) R(\rho).$$

Для радиальной части волновой функции получаем уравнение

$$\left[ -\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{l^2}{\rho^2} + l + \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{a}{\rho} \right] R(\rho) = \lambda R(\rho).$$

Здесь  $l$  — собственные значения оператора  $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ , принимающие значения  $l = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ . Ниже рассматривается только случай  $l = 0$ , когда уравнение имеет вид

$$\left[ -\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{a}{\rho} \right] R(\rho) = \lambda R(\rho). \tag{4}$$