могут быть использованы при попытках найти эту причину.

Остальные разложения также могут быть использованы при тщательном изучении структуры суперсимметричных теорий вне рамок теории возмущений.

Авторы глубоко признательны П. И. Пронину за полезные обсуждения и замечания, а также В. В. Асадову за финансовую поддержку исследований.

Литература

1. *t'Hooft G.* // Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 3432.
2. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. 1994. **B426**. P. 19.
3. *Пронин П.И., Степаньянц К.В.* // ТМФ. 1998. **115**. С. 402.
4. *Pronin P., Stepanyantz K.* // E-print Archive: hep-th/9803185.
5. *Bilal A.* // E-print Archive: hep-th/9601007.
6. *Alvares-Gaume L., Hassan S.* // Fortschr. Phys. 1997. **45**. P. 159.
7. *Klemm A.* // E-print Archive: hep-th/9705131; *Peskin M.* // E-print Archive: hep-th/9702094.
8. *Veneziano G., Yankelowicz S.* // Phys. Lett. 1982. **B113**. P. 231; *Taylor T., Veneziano G., Yankelowicz S.* // Nucl. Phys. 1983. **B218**. P. 493.
9. *Affleck I., Dine M., Seiberg N.* // Nucl. Phys. 1984. **B241**. P. 493.
10. *Seiberg N.* // Phys. Rev. 1994. **D49**. P. 6857.
11. *Pronin P., Stepanyantz K.* // E-print Archive: hep-th/9902163.

Поступила в редакцию
17.02.99

УДК 538.915; 539.01.1

О МНОЖЕСТВЕ УНИКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАФЛИНА

Б. А. Лысов, О. Ф. Дорофеев

(*кафедра теоретической физики*)

Показано, что для определенных соотношений между индукцией магнитного поля и величиной заряда электрона в задаче коррелированного движения двух электронов в постоянном и однородном магнитном поле существуют точные решения в виде элементарных функций (уникальные лафлиновские состояния). Приведен ряд соображений, позволяющих понять физический смысл этих замечательных значений магнитного поля. Интерес к этой задаче связан с новым состоянием вещества, обнаруженным экспериментально.

Рассмотрим двумерное движение двух электронов в постоянном и однородном магнитном поле. В этой задаче движение центра масс отделяется от относительного движения.

Стационарное уравнение Шрёдингера для относительного движения (задача Лафлина) имеет вид

$$\left\{\frac{1}{m^*}\left[\left(\widehat{p}_x-\frac{eB}{4c}\widehat{y}\right)^2-\left(\widehat{p}_y+\frac{eB}{4c}\widehat{x}\right)^2\right]+\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}\Psi=E\Psi. \tag{1}$$

Здесь m^* — эффективная масса электрона в данной гетероструктуре, $e-$ абсолютная величина заряда электрона, B — индукция магнитного поля. Использована симметричная калибровка векторного потенциала

$$\mathbf{A}=-\frac{B}{2}y\mathbf{e}_x+\frac{B}{2}x\mathbf{e}_y+\frac{B}{2}r\mathbf{e}_\varphi. \tag{2}$$

Уравнение (1) формально является уравнением Шрёдингера для частицы с массой $m^*/2$, зарядом $-e/2$, которая взаимодействует с однородным магнитным полем (2) и неподвижным зарядом $-2e$, помещенным в начало координат.

Уравнение (1) целесообразно переписать в безразмерных переменных. Для этого введем магнитную длину $l_B=\sqrt{2\hbar c/(eB)}$ и безразмерное собственное значение энергии $\lambda=2E/(\hbar\omega_c)$, где $\omega_c=eB/(m^*c)$ — циклотронная частота. Полагая теперь

$$x=l_B\xi,\quad y=l_B\eta,\quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

перепишем уравнение (1)

$$\left[\left(\widehat{p}_\xi-\frac{1}{2}\widehat{\eta}\right)^2+\left(\widehat{p}_\eta+\frac{1}{2}\widehat{\xi}\right)^2+\frac{a}{\rho}\right]\Psi=\lambda\Psi. \tag{3}$$

Здесь $a=\sqrt{B_0/B}$ и $B_0=2cm^{*2}e^3/\hbar^3\simeq 4{,}7\times 10^9\,(m^*/m)^2$ — индукция критического поля. В полярных координатах уравнение (3) принимает вид

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-i\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{4}\rho^2+\frac{a}{\rho}\right]\Psi=\lambda\Psi.$$

Волновую функцию ищем в виде

$$\Psi=\exp\left(il\varphi\right)R\left(\rho\right).$$

Для радиальной части волновой функции получаем уравнение

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{l^2}{\rho^2}+l+\frac{1}{4}\rho^2+\frac{a}{\rho}\right]R\left(\rho\right)=\lambda R\left(\rho\right).$$

Здесь l — собственные значения оператора $L_z = -i\partial/\partial\varphi$, принимающие значения $l=0\pm1,\pm2,\ldots$. Ниже рассматривается только случай $l=0$, когда уравнение имеет вид

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{4}\rho^2+\frac{a}{\rho}\right]R\left(\rho\right)=\lambda R\left(\rho\right). \tag{4}$$

Заметим, что оператор Гамильтона в левой части (4) можно записать следующим образом:

$$\widehat{H} = \widehat{p}_\rho^2 + \frac{1}{4}\rho^2 + \frac{1}{4\rho^2} + \frac{a}{\rho}. \tag{5}$$

Здесь выражение

$$\widehat{p}_\rho = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{2\rho}\right)$$

является оператором радиального импульса, самосопряженным на гильбертовом пространстве $L^2(0,\infty,\rho d\rho)$. Отметим появление слагаемого $1/\left(4\rho^2\right)$ в выражении (5).

Радиальные собственные функции ищем в виде

$$R(\rho) = \exp\left(-\rho^2/4\right) f(\rho).$$

Для функции $f(\rho)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\frac{df}{d\rho} + \left(\lambda - 1 - \frac{a}{\rho}\right) f(\rho) = 0. \tag{6}$$

Для магнитных полей произвольной величины (произвольное значение параметра a) регулярное в нуле решение уравнения (6), обеспечивающее принадлежность $R(\rho)$ гильбертову пространству, дается бесконечным рядом, структура которого весьма сложна и еще мало изучена.

Лишь для некоторых уникальных значений магнитного поля функции $f(\rho)$ вырождаются в полиномы [1–6], так что

$$R_{nk}(\rho) = C_{nk}\exp\left(-\rho^2/4\right) Q_{nk}(\rho), \tag{7}$$

где

$$Q_{nk}(\rho) = \sum_{j=0}^{n} b_j \rho^j$$

— полином степени n, имеющий в физической области $(\rho \geqslant 0)$ k нулей (n — главное квантовое число, k — радиальное квантовое число). Для всех состояний этого уникального вида собственные значения λ даются единой простой формулой

$$\lambda = n + 1, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{8}$$

На рис. 1 показана зависимость собственных значений $\lambda = 2E/(\hbar\omega_c)$ от параметра $a = \sqrt{B_0/B}$. Нижняя кривая соответствует основному состоянию, следующая — первому возбужденному состоянию и так далее. Точками отмечены значения параметров λ и a уникальных состояний.

Коэффициенты полинома $Q_{nk}(\rho)$ определяются рекуррентными соотношениями

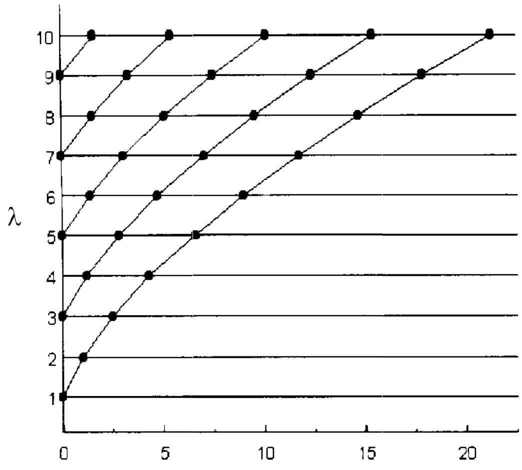

Рис. 1.

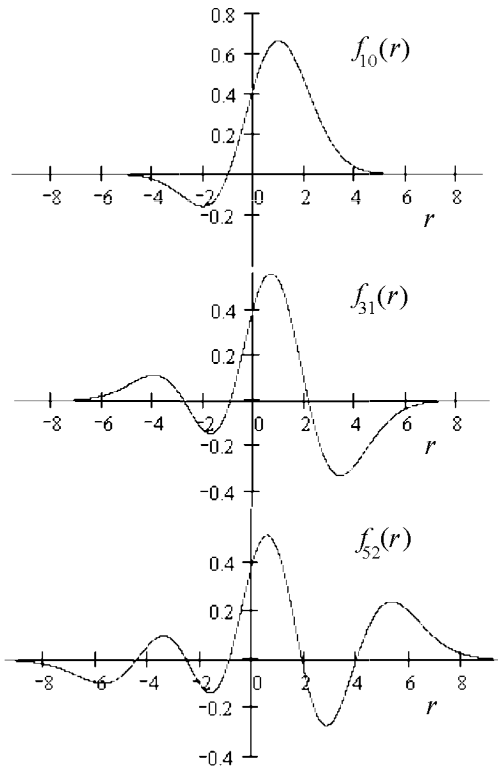

Рис. 2.

$$b_0 = 1,$$
$$b_1 = 2,$$
$$b_j = \left[a b_{j-1} + (j - n - 2) b_{j-2}\right] j^{-2}.$$

На рис. 2 и 3 показаны радиальные функции и радиальные плотности нескольких первых состояний, причем значения радиальной переменной приведены в эффективных боровских радиусах $a_B^* = \hbar^2/\left(m^* e^2\right)$. Уникальные значения величины магнитного поля определяются соотношениями

$$(n+1)^2 b_{n+1} = a b_n - b_{n-1} = 0.$$

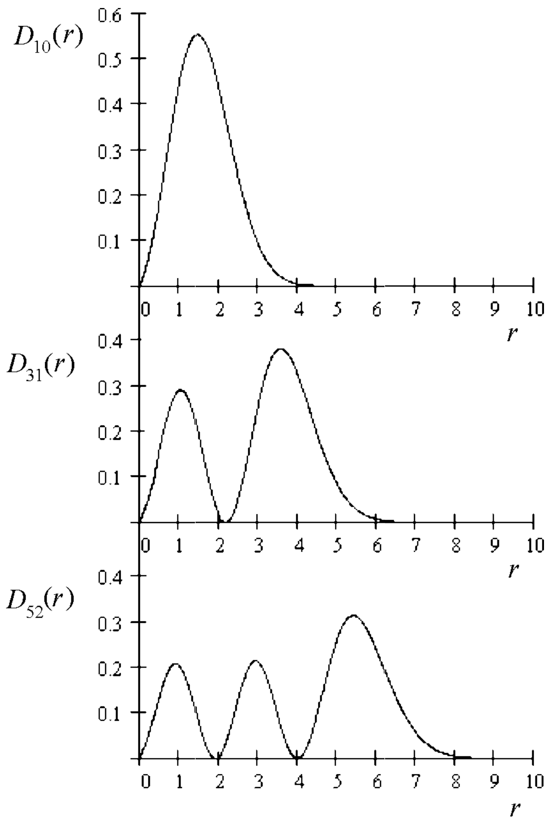

Рис. 3.

Ниже приводятся несколько первых значений параметра:

$$
\begin{aligned}
&a_{10} = 1, && a_{31} = \sqrt{10-\sqrt{73}},\\
&a_{20} = \sqrt{6}, && a_{41} = \sqrt{25-3\sqrt{33}}.\\
&a_{30} = \sqrt{10+\sqrt{73}}, &&\\
&a_{40} = \sqrt{25+\sqrt{73}}. &&
\end{aligned}
$$

Любопытно, что уровни энергии (7) рассматриваемых уникальных состояний могут быть получены из правила квантования Бора–Зоммерфельда, если включить в рассмотрение как физическую ($\rho \geqslant 0$), так и нефизическую ($\rho < 0$) области значений переменной ρ. Эффективную потенциальную энергию при этом следует положить равной (см. (5))

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{4}\rho^2 + \frac{a}{\rho} + \frac{1}{4\rho^2}.$$

Правило квантования Бора–Зоммерфельда с учетом сделанных выше замечаний записывается в виде

$$2\left(\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\sqrt{\lambda - U_{\text{eff}}(\rho)} + \int\limits_{\rho_3}^{\rho_4} d\rho\sqrt{\lambda - U_{\text{eff}}(\rho)}\right) = \\ = 2\pi(n+1). \qquad (9)$$

Появление единицы в правой части формулы (9) объясняется наличием четырех регулярных точек поворота, вклад каждой из них равен $1/4$. График эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(\rho)$ в физической ($\rho \geqslant 0$) и нефизической ($\rho < 0$) областях и точки поворота при $\lambda = 2$ показаны на рис. 4. Кстати говоря, если не включать слагаемое $1/\left(4\rho^2\right)$ в выражение U_{eff}, следовало бы считать, что в точке $\rho = 0$ имеется непроницаемая потенциальная стенка, а вклад от нее был бы равен $1/2$, а не $1/4$ [7]. Интегрирование в левой части равенства (9) легко выполняется с помощью теории вычетов (контур интегрирования в комплексной области показан на рис. 5) и в результате для λ мы получаем в точности формулу (7) независимо от значений параметра a.

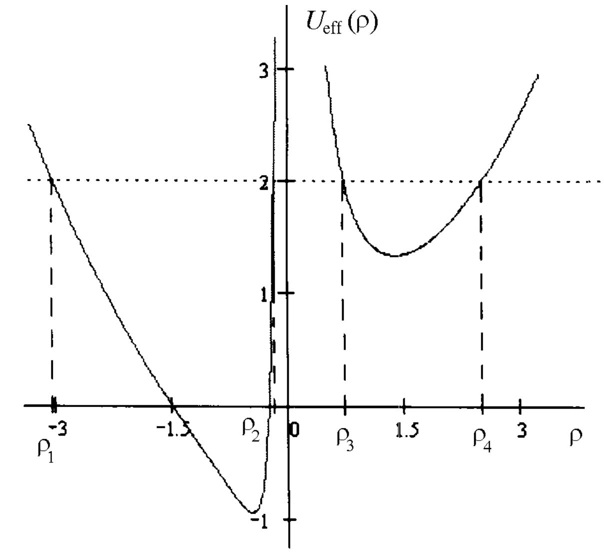

Рис. 4.

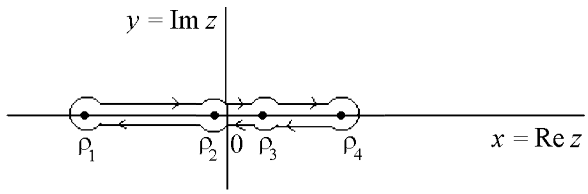

Рис. 5.

Вопрос о том, чем с физической точки зрения замечательны магнитные поля, определяемые соотношениями (8), был до сих пор не совсем понятен. Ниже мы приводим соображения, которые, как нам кажется, проясняют этот вопрос.

Введем в рассмотрение операторы центра орбиты [8]:

$$X_c = -p_\eta + \frac{1}{2}\xi, \qquad Y_c = p_\xi + \frac{1}{2}\eta.$$

(В отличие от работы [8] здесь используется симметричная калибровка и проведено обезразмеривание с помощью магнитной единицы длины.) Тогда оператор квадрата расстояния от центра орбиты до начала координат можно записать в виде

$$R_c^2 = p_\xi^2 + p_\eta^2 + \frac{1}{4}\rho^2 + L_z.$$

В случае чисто магнитного поля эти операторы коммутируют с гамильтонианом, так что в стационарном состоянии R_c^2 имеет вполне определенное значение. В нашем случае

$$R_c^2 = H - 2L_z - \frac{a}{\rho}$$

и из-за наличия кулоновского взаимодействия R_c^2 не сохраняются и в стационарном состоянии, поэтому имеет смысл говорить лишь о среднем значении этой физической величины.

Введем теперь средний квадрат радиуса орбиты так же, как это было сделано в [9] для чисто магнитного поля:

$$\left\langle R^2 \right\rangle = \left\langle \rho^2 \right\rangle - \left\langle R_c^2 \right\rangle .$$

При $l = 0$ с учетом (3), (8) это равенство можно записать в виде

$$\left\langle R^2 \right\rangle = \left\langle \rho^2 \right\rangle + a \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle - \lambda.$$

Таким образом, возвращаясь к обычным единицам, средний магнитный поток в стационарном состоянии можно записать так:

$$\Phi = \pi \left\langle R^2 \right\rangle B\, l_B^2 = \left\langle R^2 \right\rangle \Phi_0, \qquad (10)$$

где $\Phi_0 = 2\pi c\hbar/e$ — квант магнитного потока.

Для стационарных состояний (7) величина Φ, как показали расчеты, оказалась кратной величине Φ_0:

$$\Phi = (n+1)\ \Phi_0, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

В качестве иллюстрации ниже приведены результаты расчета для состояний f_{10} и f_{20}.

Для состояния f_{10} $a = 1$ и $\lambda = 2$:

$$f_{10}(\rho) = \exp\left(-\rho^2/4\right)\ (1+\rho)\,,$$

$$\left\langle \rho^2 \right\rangle = \left(10 + 3\sqrt{2\pi}\right) \Big/ \left(3 + \sqrt{2\pi}\right),$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \left(2 + \sqrt{2\pi}\right) \Big/ \left(3 + \sqrt{2\pi}\right),$$

$$\left\langle R^2 \right\rangle = 2.$$

Для состояния f_{20} $a = \sqrt{6}$ и $\lambda = 3$:

$$f_{20}(\rho) = \exp\left(-\rho^2/4\right)\ \left(1 + \sqrt{6}\rho + \rho^2\right),$$

$$\left\langle \rho^2 \right\rangle = \left(114 + 36\sqrt{3\pi}\right) \Big/ \left(25 + 8\sqrt{3\pi}\right),$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = 6\left(\sqrt{6} + \sqrt{2\pi}\right) \Big/ \left(25 + 8\sqrt{2\pi}\right),$$

$$\left\langle R^2 \right\rangle = 3.$$

Формула (10) имеет место для всех уникальных состояний, хотя пока нам не удалось показать это в общем виде.

Авторы признательны А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за полезные обсуждения и внимание к нашей работе.

Литература

1. *Васильев А.Н., Дорофеев О.Ф., Лобанов А.Е.* и др. Препринт физ. ф-та МГУ. 1987, №31.
2. *Васильев А.Н., Дорофеев О.Ф., Лобанов А.Е.* и др. // Проблемы физики высоких энергий и теории поля: Тр. XI семинара. Протвино, 5–9 июля 1988 г. М.: Наука, 1989. С. 403.
3. *Лысов Б.А., Дорофеев О.Ф., Лобанов А.Е., Тернов И.М.* Препринт физ. ф-та МГУ. 1989, № 2.
4. *Lysov B.A., Dorofeyev O.F., Ternov I.M.* // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1991. **A308**. P. 115.
5. *Ge Y.F.* // Europhys. Lett. 1991. **16**. P. 11.
6. *Taut M.* // J. Phys. A. 1994. **27**. P. 1045.
7. *Мигдал А.Б.* Качественные методы в квантовой механике. М., 1975.
8. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Квантовая механика. М.; Л., 1948.
9. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.* Квантовая механика. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
05.03.99