ГЕОФИЗИКА

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УСРЕДНЕНИЯ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И УСРЕДНЕНИЯ ПО ОБЪЕМУ ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

А. Г. Вологдин, В. Д. Гусев

(*кафедра физики атмосферы*)

Доказано, что возможно получить пространственные статистические характеристики случайно-неоднородных сред путем усреднения вдоль прямой линии произвольного направления вместо усреднения по объему. Тем самым найдено новое решение проблемы пространственной эргодичности. Показано, что только при постоянной скорости перемещения среды измерение временных средних позволяет находить пространственные статистические характеристики. Результаты представляют интерес для обработки натурных данных, полученных при распространении волн разной природы (и частоты) в различных слоях атмосферы, а также в океане.

В радиофизических и геофизических задачах, описывающих распространение различных волн в случайно-неоднородных средах, возникает проблема пространственной эргодичности. Это связано с необходимостью получить статистическую информацию по одной пространственной реализации, что диктуется неповторимостью натурного эксперимента. Уместно подчеркнуть, что при исследовании пространственной эргодичности появляются трудности математического характера, обусловленные тремя координатами. Укажем также, что, как правило, для получения пространственных данных используются временные характеристики при введении некоторых допущений (гипотез) [1, 2]. Это, по-видимому, может уменьшить точность в интерпретации свойств среды.

В настоящей работе мы ставим цель — найти более простое, чем в [3], решение проблемы пространственной эргодичности путем использования усреднения вдоль произвольной прямой линии. Это позволит в определенном смысле принципиально изменить подход к обработке пространственных экспериментальных данных и стимулировать их получение.

Рассмотрим статистически однородное случайное поле. Сконцентрируем наш интерес на однородности по пространству, опуская время t в соответствующих выкладках и имея, таким образом, поле

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z). \tag{1}$$

Остановимся на статистических моментах первого и второго порядка, которыми оперирует корреляционная теория. Из условия однородности поля следует, что среднее значение его и функция автокорреляции имеют вид

$$\langle f(\mathbf{r})\rangle = \langle f(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})\rangle = \mathrm{const},$$
$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = B(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1). \tag{2}$$

Ограничиваясь только пространственной эргодичностью, пользуются гипотезой [3], что для однородных и пространственно эргодических полей средние по ансамблю реализаций «совпадают» со средними по пространству в смысле сходимости по вероятности (или в среднем квадратичном). В этом случае справедливо равенство

$$\langle f(\mathbf{r})\rangle = \overline{f(\mathbf{r})}_{V\to\infty} \equiv \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\int\limits_V f(\mathbf{r})\, d^3r,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций, а черта — усреднение по объему V пространственной области.

Сформулируем взамен этого другое предположение:

$$\langle f(x,y,z)\rangle = \overline{f(x,y,z)}_{L\to\infty} \equiv \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\int\limits_0^L f(x,y,z)\, dx, \tag{3}$$

где интегрирование ведется вдоль произвольной прямой линии, по которой направим ось x.

Среднее значение оценки $\overline{f(x,y,z)_L} = \overline{f}_L$ вдоль прямой (оси x) на конечном интервале $(0, L)$ само является случайной величиной. Вычислим ее математическое ожидание и дисперсию. Тогда

$$\langle \overline{f}_L\rangle = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \langle f(x,y,z)\rangle dx =$$
$$= \frac{1}{L}\int\limits_0^L dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z) W_1(f)\, df = \langle f\rangle,$$

что позволяет утверждать несмещенность сделанной оценки математического ожидания. Для дисперсии имеем

$$\sigma^2 = \left\langle \frac{1}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L f(x_1,y,z) f(x_2,y,z)\, dx_1 dx_2 \right\rangle - \\ - \left\langle \frac{1}{L} \int\limits_0^L f(x,y,z)\, dx \right\rangle^2 = \\ = \frac{1}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L B(x_2 - x_1, 0, 0)\, dx_1 dx_2. \tag{4}$$

Здесь под интегралом стоит автокорреляционная функция (2). Таким образом, исходя из выражения для дисперсии σ^2, можно утверждать, что требование асимптотической состоятельности оценки среднего значения

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L B(x_2 - x_1, 0, 0)\, dx_1, dx_2 = 0 \tag{5}$$

есть необходимое и достаточное условие сходимости в среднем квадратичном:

$$\underset{L\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \left\{ \overline{f(\mathbf{r})}_L - \left\langle \overline{f(\mathbf{r})}_L \right\rangle \right\} = 0.$$

В силу неравенства Чебышева $P\left\{ \left| \overline{f(\mathbf{r})}_L - \left\langle \overline{f(\mathbf{r})}_L \right\rangle \right| \geqslant \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant \sigma^2/\varepsilon^2$ условие (5) является достаточным для случайной величины $\overline{f(\mathbf{r})}_L$ и для сходимости по вероятности: $\lim\limits_{L\to\infty} \left| \overline{f(\mathbf{r})}_L - \left\langle \overline{f(\mathbf{r})}_L \right\rangle \right| = 0$ (по вероятности). Следовательно, условие (5) есть условие пространственной эргодичности случайного поля (1). При его выполнении можно считать выражение (3) справедливым.

Выражение (5) можно упростить, если сделать замену переменных $x_2 - x_1 = \xi$, $(x_1 + x_2)/2 = \eta$ и проинтегрировать по η. Тогда

$$\frac{1}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L B(x_2 - x_1, 0, 0)\, dx_1 dx_2 = \\ = \frac{2}{L} \int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) B(\xi, 0, 0)\, d\xi. \tag{6}$$

Учитывая [4], что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\, dx = \int\limits_0^\infty f(x)\, dx, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{7}$$

при $L \to \infty$ вместо (5) получаем

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\xi, 0, 0)\, d\xi = 0. \tag{8}$$

Таким образом, если автокорреляционная функция абсолютно интегрируема, то оценка среднего асимптотически состоятельна, а случайное поле (1) является пространственно эргодическим.

Однако вопрос о возможности усреднения вдоль прямой линии нельзя считать полностью решенным, если оставить без внимания зависимость величины (4) от двух других координат. Рассмотрим для этого среднее, полученное усреднением вдоль прямой линии, как функцию координат y и z:

$$\overline{f(x,y,z)}_L = \frac{1}{L} \int\limits_0^L f(x,y,z)\, dx = U(y,z). \tag{9}$$

Возьмем разность значений этой функции в двух, вообще говоря, произвольных точках: $u = U(y,z) - -U(0,0)$. Рассмотрим дисперсию этой разности σ_u^2. Величина (9) будет независимой от координат y, z при $L \to \infty$, если выполнено условие

$$\lim_{L\to\infty} \sigma_u^2 = 0. \tag{10}$$

Используя (4) и (6), находим выражение для дисперсии:

$$\sigma_u^2 = \frac{4}{L} \int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) [B(\xi,0,0) - B(\xi,y,z)]\, d\xi = \\ = a(L) - a(L,y,z).$$

По определению $\sigma_u^2 \geqslant 0$ и, следовательно,

$$a(L) = \frac{4}{L} \int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) B(\xi,0,0)\, d\xi \geqslant a(L,y,z) = \\ = \frac{4}{L} \int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) B(\xi,y,z)\, d\xi.$$

Применяя (7), получаем

$$\lim_{L\to\infty} a(L) = \lim_{L\to\infty} \frac{4}{L} \int\limits_0^\infty B(\xi,0,0)\, d\xi,$$

а из условия эргодичности (8) — $\lim\limits_{L\to\infty} a(L) = 0$. Вследствие условия $a(L) > a(L,y,z)$ справедливо равенство $\lim\limits_{L\to\infty} a(L,y,z) = 0$. Таким образом, условие (10) доказано.

В результате утверждение (3) справедливо, т.е. математическое ожидание для случайных полей (1) можно получать путем усреднения вдоль произвольной прямой линии, а условием эргодичности относительно математического ожидания является условие (5) или (8).

Условие эргодичности случайного статистически однородного по пространству поля относительно автокорреляционной функции может быть записано в виде

$$B(\Delta\mathbf{r}) = B_{V\to\infty}(\Delta\mathbf{r}) \equiv \overline{f_0(\mathbf{r})f_0(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})}_{V\to\infty} \equiv \equiv \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\int\limits_V f_0(\mathbf{r})f_0(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\,d^3r,$$

где $f_0(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \langle f(\mathbf{r})\rangle$ — центрированная реализация поля, $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Сформулируем взамен этой иную гипотезу:

$$B(\Delta\mathbf{r}) = B_{L\to\infty}(\Delta\mathbf{r}) \equiv \equiv \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_0^L f_0(x,y,z)f_0(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\,dx = = \lim_{L\to\infty} B_L(\Delta\mathbf{r}). \tag{11}$$

Рассмотрим оценку автокорреляционной функции $B_L(\Delta\mathbf{r})$. На конечном интервале $(0, L)$ эта оценка представляет собой случайную величину. Найдем ее среднее и дисперсию. Для математического ожидания получаем

$$\langle B_L(\Delta\mathbf{r})\rangle = = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \langle f_0(x,y,z)f_0(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\rangle\,dx = = B(\Delta x, \Delta y, \Delta z). \tag{12}$$

Таким образом, оценка автокорреляционной функции будет несмещенной. Для дисперсии получим

$$\sigma^2 = \left\langle [B_L(\Delta\mathbf{r}) - \langle B_L(\Delta\mathbf{r})\rangle]^2\right\rangle = = \frac{1}{L^2}\int\limits_0^L\int\limits_0^L [\langle f_{01}f_{01\Delta}f_{02}f_{02\Delta}\rangle - B(\Delta x,\Delta y,\Delta z)]\,dx_1dx_2,$$

где $f_{0i} = f_0(x_i, y, z)$, $f_{0i\Delta} = f_0(x_i+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ $(i = 1, 2)$. Дальнейшая конкретизация этого выражения возможна лишь для частных видов случайных полей, для которых известен четырехмерный центральный момент четвертого порядка. Для гауссовских случайных полей, для которых высшие моменты выражаются через парные корреляции [5], можно написать

$$\sigma^2 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L\int\limits_0^L [B^2(x_2-x_1, 0, 0) + B(x_2-x_1+\Delta x, \Delta y, \Delta z)\times \times B(x_2-x_1-\Delta x, \Delta y, \Delta z)]\,dx_1dx_2.$$

Если сделать замену переменных $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = x_1$ и выполнить интегрирование по η, то получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{L^2}\int\limits_{-L}^0 [\ldots]\,d\xi \int\limits_{-\xi}^L d\eta + \frac{1}{L^2}\int\limits_0^L [\ldots]\,d\xi \int\limits_0^{L-\xi} d\eta = = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)[\ldots]\,d\xi,$$

где

$$[\ldots] = B^2(\xi, 0, 0) + + B(\xi+\Delta x, \Delta y, \Delta z)B(\xi-\Delta x, \Delta x, \Delta z). \tag{13}$$

При $L\to\infty$, используя (7), находим:

$$\sigma^2 = \frac{2}{L}\int\limits_0^\infty [\ldots]\,d\xi. \tag{14}$$

Формулы (12) и (14) свидетельствуют, что при $L\to\infty$ математическое ожидание оценки автокорреляционной функции $B_L(\Delta\mathbf{r})$ равно истинной автокорреляционной функции $B(\Delta\mathbf{r})$, а дисперсия пропорциональна $1/L$. Следовательно, если подынтегральное выражение (13) абсолютно интегрируемо, то рассматриваемая оценка асимптотически состоятельна, т.е.

$$\lim_{L\to\infty}\sigma^2 = \lim_{L\to\infty}\frac{2}{L}\int\limits_0^\infty [\ldots]\,d\xi = 0. \tag{15}$$

При этом случайное поле (1) пространственно эргодично относительно автокорреляционной функции. При выполнении этого условия автокорреляционную функцию $B(\Delta\mathbf{r})$ можно оценить путем усреднения вдоль произвольной прямой линии (11).

Возможность оценки автокорреляционной функции путем усреднения вдоль произвольной прямой линии не может считаться полностью доказанной (так же как и для математического ожидания), если не рассмотреть зависимость величины (11) от двух других координат: y и z. Проанализируем для этого оценку $B_L(\Delta\mathbf{r})$, которую обозначим как $P(y,z)$. Вычисляя дисперсию σ_p^2 разности значений $p = P(y,z) - P(0,0)$, получим

$$\sigma_p^2 = b(L) - b(L, y, z),$$

$$b(L) = \frac{4}{L}\int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)[B(\xi, 0, 0) + + B(\xi-\Delta x, \Delta y, \Delta z)B(\xi+\Delta x, \Delta y, \Delta z)]\,d\xi,$$

$$b(L, y, z) = \frac{4}{L}\int\limits_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)[B^2(\xi, y, z) + + B(\xi-\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)(\xi+\Delta x, y-\Delta y, z-\Delta z)]\,d\xi.$$

(При выводе этих выражений сохранялись все обозначения, предположения и математические приемы, которые использованы выше.)

Применяя (7), имеем:

$$\lim_{L\to\infty} b(L) = \lim_{L\to\infty} 4\frac{1}{L}\int\limits_0^\infty [B^2(\xi,y,z)+ \\ +B(\xi-\Delta x,\Delta y,\Delta z)B(\xi+\Delta x,\Delta y,\Delta z)]\,d\xi,$$

а из условия пространственной эргодичности (15) получаем $\lim_{L\to\infty} a(L)=0$. По определению $\sigma_p^2 \geqslant 0$, поэтому $b(L)\geqslant b(L,y,z)$ и $\lim_{L\to\infty} b(L,y,z)=0$. Таким образом, $\lim_{L\to\infty}\sigma_p^2=0$ и, следовательно, выражение $P(y,z)$ при $L\to\infty$ не зависит от координат y,z.

В итоге утверждение (11) полностью доказано, и функцию автокорреляции для случайных статистически пространственно однородных полей можно получать путем усреднения вдоль произвольной прямой линии, а условием эргодичности соответственно будет условие (15).

В заключение приведем пример применения результата этой работы для получения пространственных статистических характеристик случайных полей путем использования временных измерений.

Рассмотрим случайно-неоднородную среду, которая характеризуется случайным полем (1). Если среда движется, то пространственные аргументы случайного поля будут функциями времени: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Аргумент t, который был опущен в (1), характеризует собственную изменчивость поля во времени. Прямая зависимость поля от времени в сравнении с его зависимостью от времени через пространственные координаты не является приоритетной (см., напр., [6]), поэтому ею можно пренебречь. В среде, движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{V}=\mathrm{const}$, зависимость случайного поля от времени будет иметь вид $f(x_0+V_xt, y_0+V_yt, z_0+V_zt)$, а в системе координат, в которой ось x направлена по вектору скорости и соответственно $V_x=|\mathbf{V}|=V$, $V_y=0$, $V_z=0$, — вид $f(x_0+Vt,y_0,z_0)$. Проанализируем временное среднее, которое по определению равно

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x_0+Vt,y_0,z_0)\,dt.$$

Перейдем в этом интеграле к координате x', т.е. сделаем замену переменной: $x_0+Vt=x'$. Это дает

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x_0+Vt,y_0,z_0)\,dt = \\ =\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_{x_0}^{x_0+L} f(x',y_0,z_0)\,dx',$$

где $L=VT$. Выражение, стоящее справа в этом равенстве, представляет собой среднее значение случайного поля, вычисленное вдоль прямой (оси x'). Тем самым можно утверждать, что если выполняется условие пространственной эргодичности (6), то последнее выражение представляет собой пространственную статистическую характеристику поля.

Следовательно, полученное равенство позволяет констатировать, что в случайно-неоднородных средах, движущихся с постоянной скоростью, пространственные статистические характеристики случайного поля могут быть определены путем измерения временных средних.

Основные выводы данной работы заключаются в следующем. Доказана возможность получения пространственных статистических характеристик случайно-неоднородных сред (многопараметрических случайных полей) путем усреднения вдоль прямой линии произвольного направления вместо усреднения по объему, и тем самым найдено более простое решение проблемы пространственной эргодичности. Кроме того, показано, что только при постоянной скорости перемещения случайно-неоднородной среды временные измерения позволяют находить пространственные статистические характеристики. Следует подчеркнуть важность выполнения условия независимости скорости дрейфа от времени и координат. Только в этом случае можно отождествлять полученные в эксперименте средние временные характеристики со статистическими моментами (очевидно, что для проверки этого условия необходим соответствующий контроль).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-02-16834).

Литература

1. *Семенов А.А., Арсеньян Т.И.* Флуктуации электромагнитных волн на приземных трассах. М.: Наука, 1978.
2. *Ламли Дж., Пановский Г.А.* Структура атмосферной турбулентности. М.: Мир, 1966.
3. *Рытов С. М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
5. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
6. *Миркотан С.Ф., Кушнеревский Ю.В.* Неоднородная структура и движения в ионосфере // Ионосферные исследования. № 12. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию
18.01.99