КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Найдены явные решения для одной полностью интегрируемой системы трех частиц во внешнем поле. Получено соотношение, связывающее начальные условия, константу связи и время падения двух частиц в сингулярность потенциала взаимодействия.

К настоящему времени используются различные методы решения уравнений движения в явном виде для многих полностью интегрируемых систем [1–4]. В предыдущей работе одного из авторов [5] был найден такой метод для класса полностью интегрируемых систем, состоящих из попарно взаимодействующих N частиц с равными массами $m=1$, находящихся на прямой во внешнем поле. В настоящей работе мы применим этот метод к одному классу полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле для случая двух и трех частиц. Основываясь на полученных решениях, мы оценим время падения частиц на центр при различных начальных условиях.

Системы рассматриваемого класса обладают парой Лакса и как следствие — N интегралами движения, которые являются полиномами по импульсам и координатам взаимодействующих частиц. Один из этих интегралов движения является гамильтонианом системы:

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2}+W(x_i)\right)+\sum_{i>j}^{N}V(x_i-x_j). \tag{1}$$

Для того чтобы система обладала свойством полной интегрируемости, потенциалы внешнего поля $W(x)$ и парного взаимодействия $V(x)$ должны иметь следующий вид:

$$V(x)=\frac{a}{x^2},\, W(x)=\gamma_1x^4+\gamma_2x^2+\gamma_3x, \tag{2}$$

где a,γ_i, $i=1,2,3$ — произвольные константы.

В работе [5] система N частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) была связана с неоднородным уравнением Бюргерса–Хопфа. С помощью этой связи были найдены решения уравнений движения для системы (1)–(2). При выполнении следующих условий:

$$a=-A^2,$$

$$\gamma_1=-\frac{\alpha^2}{2},\quad \gamma_2=-\alpha\beta,\quad \gamma_3=-\alpha A(N-1), \tag{3}$$

где A,α,β — произвольные константы, координаты N частиц являются нулями функции

$$\phi(x,t)=\sum_{k=0}^{N}x^k[\exp(t\hat{\mathbf{T}})\mathbf{c}(0)]_k, \tag{4}$$

где

$$\hat{T}_{00}=-\beta,\quad \hat{T}_{02}=-a,$$

$$\hat{T}_{N-1N}=-N\beta,\quad \hat{T}_{N-1N-2}=2\alpha,\quad \hat{T}_{NN-1}=\alpha,$$

$$\hat{T}_{kk-1}=(N+1-k)\alpha,\quad \hat{T}_{kk+1}=-(k+1)\beta,$$

$$\hat{T}_{kk+2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}a,\quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \tag{5}$$

и

$$c_{N-k}(0)=(-1)^k\sum_{1\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_k\leqslant N}x_{\lambda_1}(0)\ldots x_{\lambda_k}(0),$$

$$c_N(0)=1.$$

Остальные элементы матрицы $\hat{\mathbf{T}}$ равны нулю. В этих выражениях $x_i(0)$, $i=1,\ldots,N$, — начальные координаты N частиц.

Применим кратко изложенный выше метод [5] и найдем в явном виде решения уравнений движения для класса полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле. Рассмотрим системы частиц вида (1) с потенциалами (2) при ограничениях (3). Наложим следующие дополнительные условия:

$$\beta=0,\quad \alpha=-A^2. \tag{6}$$

Таким образом, мы имеем только один параметр в потенциалах $V(x)$, $W(x)$. В настоящей работе мы получим и проанализируем явные решения уравнений движения для двух и трех частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) при ограничениях (3) и (6). Другими словами, мы рассматриваем подмножество систем (1)–(3), определяемое условиями (6).

Посмотрим, как работает данный метод в простейшем случае двух частиц. Для $N=2$ из (4)–(5) получаем $\hat{\mathbf{T}}^3=(-2a^3)E$, где E — единичная матрица. В этом случае ряд в (4) можно просуммировать, и координаты двух частиц являются двумя решениями уравнения

$$\phi(x,t)=0. \tag{7}$$

При этом уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{2} x^k\Big[S_k(\theta)\bar{\mathbf{T}}^k\mathbf{c}(0)\Big]_k=0,$$

где $a\bar{\mathbf{T}}=\hat{\mathbf{T}}$, $\theta=-at(2)^{1/3}$,

$$S_0(\theta)=\frac{1}{3}\bigg(\mathrm{e}^{\theta}+2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\Big)\bigg),$$

$$S_1(\theta)=\frac{1}{3}\bigg(\mathrm{e}^{\theta}-2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta+\frac{\pi}{3}\Big)\bigg),$$

$$S_2(\theta)=\frac{1}{3}\bigg(\mathrm{e}^{\theta}-2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta-\frac{\pi}{3}\Big)\bigg).$$

Асимптотика данного уравнения при любых начальных условиях имеет вид $x^2-2^{1/3}x+2^{-1/3}=0$. Отсюда видно, что при некотором конечном времени t_0 частицы падают в сингулярность потенциала взаимодействия. Например, при симметричных начальных условиях $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=1$ имеем $t_0=1{,}581/A^2$.

Рассмотрим теперь систему трех частиц: $N=3$. При ограничениях (6) получаем $\hat{\mathbf{T}}^4=0$, и алгебра $\hat{\mathbf{T}}$-матриц становится конечной. Рассмотрим далее симметричные начальные условия:

$$x_1(0)=-x_0,\quad x_2(0)=0,\quad x_3(0)=x_0. \tag{8}$$

Введем обозначение $r=-1/(A^2t)$. В этом случае уравнение (8) принимает следующую форму Кардано:

$$y^3+uy+q=0,\quad x=y-\frac{r(1-2x_0^2r)}{Z}, \tag{9}$$

где

$$Z=1-x_0^2r+r,\quad u=-\frac{r(x_0^4+9r-3x_0^2r^3)}{3Z},$$

$$q=\frac{\sum\limits_{k=0}^{8}C_kr^k}{Z},$$

$$C_0=-1,\quad C_1=3x_0^2,\quad C_2=-3x_0^4,\quad C_3=-3+x_0^6,$$

$$C_4=6x_0^2,\quad C_5=-3x_0^4,\quad C_6=-4+\frac{2}{27}x_0^6,$$

$$C_7=4x_0^2,\quad C_8=-\frac{2}{3}x_0^4.$$

Решения (9) определяются значением дискриминанта $Q=-108((u/3)^3+(q/2)^2)$ [6]. При $0\leqslant t<t_0$ получаем $Q>0$ и как следствие три действительных корня, дающие координаты трех частиц:

$$y_1=N+M,\quad y_{2,3}=-\frac{N+M}{2}\pm i\sqrt{3}\frac{N-M}{2},$$

где

$$N=\bigg(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-Q}{108}}\bigg)^{1/3},\quad M=\bigg(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-Q}{108}}\bigg)^{1/3}$$

при условии, что $MN=-u/3$ [7]. В момент времени $t=t_0$ мы получаем $Q=0$, что приводит к равенству координат двух частиц. То есть в этот момент времени две частицы падают в сингулярность парного потенциала взаимодействия. Используя явное выражение для дискриминанта, получаем

$$t_0=\frac{B}{A^2};\quad 0{,}53<B<0{,}89. \tag{10}$$

Значение константы B зависит от x_0. Рассматривая произвольные начальные условия, находим из (3)–(5) асимптотическую форму уравнения (9) (при условии, что $A\neq 0$):

$$[1+x_1(0)x_2(0)x_3(0)](x^3-1)=0.$$

Отсюда видно, что частицы падают в сингулярность за конечное время при любых начальных условиях. Пользуясь выражением для дискриминанта в общем случае, получаем следующую оценку сверху для t_0:

$$t_0=\frac{1}{7A^2}\times$$
$$\times\bigg|\Big\{27\Big[x_1(0)x_2(0)+x_1(0)x_3(0)+x_2(0)x_3(0)\Big]+$$
$$+7x_1(0)x_2(0)x_3(0)\Big\}\Big\{x_1(0)x_2(0)x_3(0)\Big\}^{-1}\bigg|. \tag{11}$$

Эта оценка справедлива при $x_i(0)\neq 0$, $i=1,2,3$. Из (11) и (10) следует, что при уменьшении константы связи A^2 время падения в сингулярность увеличивается.

Полученные явные решения уравнений движения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов, а также в качестве нулевого приближения при исследовании близких к рассмотренным неинтегрируемых систем частиц.

Литература

1. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cimento. 1975. **13**. P. 411; *Moser J.* // Adv. in Math. 1975. **16**. P. 197.
2. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. 1993. **A20**. P. 753.
3. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
4. *Grosse H.* // Acta Phys. Austriaca. 1980. **52**. P. 101.
5. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Lett. 1984. **A106**. P. 105.
6. *Feferman S.* The Number Systems. Foundation of Algebra and Analysis. Reading: Addison–Wesley, 1964.
7. *Korn G.A., Korn Th.M.* Mathematical Handbook. N.Y.: McGrow-Hill, 1965.

Поступила в редакцию
31.03.99