УДК 530.145.6

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

О. С. Павлова, А. Р. Френкин

(*кафедра теоретической физики; кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Предложен метод определения спектра радиального уравнения Шрёдингера с некоторыми удерживающими и притягивающими потенциалами. Этот метод связан с исследованием лапласовских образов волновых функций. Задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Подробно исследованы потенциалы степенного вида, их комбинации с кулоновским потенциалом и потенциал Юкавы.

Нахождение спектра уравнения Шрёдингера (УШ) является важнейшей задачей ядерной и атомной физики. Например, один из методов исследования кваркониумных состояний (ψ, Υ) связан с введением межкваркового потенциала в виде комбинации удерживающего потенциала (обычно степенного вида) и кулоновского [1]. В ряде физических задач используются потенциалы Юкавы и их комбинации с кулоновским. Именно такого типа потенциалы будут исследованы в данной работе с помощью предлагаемого метода.

1. Рассмотрим радиальное УШ с удерживающим потенциалом $V(r)=r^N+A/r^2-Z/r$, $N=1,2,\ldots$, и с произвольным квантовым орбитальным числом $l=0,1,2,\ldots$:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}-V_l\Psi+E\Psi=0,\quad V_l=V(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Введем новую переменную $x=r^\nu/\nu$, где $\nu=1+N/2$, и следующее обозначение: $B=A+l(l+1)$, тогда УШ принимает вид

$$\nu x\frac{d^2\Psi}{dx^2}+(\nu-1)\frac{d\Psi}{dx}-\frac{B}{\nu}\frac{1}{x}\Psi-\nu x\Psi+$$
$$+(\nu x)^{1/\nu-1}Z\Psi+(\nu x)^{2/\nu-1}E\Psi=0.$$

Отметим, что квадратично интегрируемые решения этого уравнения имеют следующее поведение в нуле и на бесконечности:

$$\Psi(x)\sim x^\beta \text{ при } x\to 0,\quad \Psi(x)\sim \mathrm{e}^{-x} \text{ при } x\to\infty, \quad (1)$$

где

$$\beta=\frac{1}{2\nu}(1+\sqrt{1+4B}).$$

Применим к УШ обобщенное преобразование Лапласа вида

$$<\Psi>=\frac{\omega^{-(\beta+\sigma)}}{\Gamma(\beta+\sigma)}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x/\omega}\,\Psi(x)x^{\sigma-1}dx,$$

специально подобранное для функций $\Psi(x)$ с заданным асимптотическим поведением при $x\to 0$ и $x\to\infty$ (1). Параметр σ будет определен в дальнейшем.

Интегрируя по частям величины $<x\Psi''>$ и $<\Psi'>$ с учетом обращения в нуль внеинтегральных членов, при $\sigma+\beta>1$ получаем

$$\left(\frac{1}{\omega^2}-1\right)<x\Psi>-\frac{1}{\omega}(2\nu\sigma+1-\nu)<\Psi>+$$
$$+Z\nu^{1/\nu-1}<x^{1/\nu-1}\Psi>+$$
$$+[\nu\sigma(\sigma-1)-(\nu-1)(\sigma-1)-B/\nu]<\frac{1}{x}\Psi>+$$
$$+E\nu^{2/\nu-1}<x^{2/\nu-1}\Psi>=0.$$

Если за основную функцию принять лапласовский образ волновой функции $\Phi(\omega)\equiv<\Psi>$, то только $<x\Psi>$ просто записывается через $\Phi(\omega)$, остальные лапласовские образы в этом уравнении при $\nu\neq 2$ выражаются через интегралы от $\Phi(\omega)$. Имеет смысл уменьшить число таких функций. Например, подбором параметра $\sigma=\beta-1/\nu+1$ можно исключить из уравнения лапласовский образ $<x^{-1}\Psi>$. Так как из преобразования Лапласа следует, что $\omega^{-2}<x\Psi>=\Phi'+(\beta+\sigma)\Phi$, получаем общее уравнение при произвольных ν и Z:

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi}{d\omega}-2\omega\alpha\Phi=$$
$$=-Z\nu^{1/\nu-2}<x^{1/\nu-1}\Psi>-E\nu^{2/\nu-2}<x^{2/\nu-1}\Psi>, \quad (2)$$

где $\alpha=\beta+\frac{1-1/\nu}{2}$.

Из теории интегральных преобразований Лапласа следует, что функция $\Psi(x)$ удовлетворяет граничному условию (1), когда $\omega=1$ — правильная точка ее лапласовского образа. Поэтому спектр задачи получается из требования регулярности функции $\Phi(\omega)$ в точке $\omega=1$ (см. [2])*).

---

*) При $Z=0$, $\nu=2$ из (2) получаем уравнение осциллятора [3]:

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi}{d\omega}+\left(\frac{E}{2}-2\alpha\omega\right)\Phi=0,\quad \alpha=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{1+4B}\right).$$

Точное решение этого уравнения $\Phi=(1-\omega^2)^{-\alpha}[(1-\omega)/(1+\omega)]^{E/4}$ регулярно в точке $\omega=1$ при $(E/4)-\alpha=n_r$. Это дает спектр осциллятора с произвольным l:

$$E=2(2n_r+1+\sqrt{1+4B}/2),\quad n_r=0,1,2,\ldots\,.$$

Выразим теперь входящие в уравнение функции $<x^\epsilon\Psi>$ (при $\epsilon = 1/\nu - 1;\ 2/\nu - 1$) через интегралы от $\Phi(\omega)$. Это можно сделать, воспользовавшись разложением волновой функции $\Psi(x)$ по степеням $x^{n/\nu}$:

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^{n/\nu+\alpha+1/(2\nu)-1/2},$$

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega^{n/\nu}\Gamma\Big(\frac{n}{\nu}+2\alpha\Big),$$

$$<x^\epsilon\Psi> = \frac{\omega^\epsilon}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(-\epsilon)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} B\Big(-\epsilon, \frac{n}{\nu}+2\alpha+\epsilon\Big) A_n\omega^{n/\nu}\Gamma\Big(\frac{n}{\nu}+2\alpha\Big).$$

Используя определение бета-функции, получаем

$$<x^\epsilon\Psi> = \frac{\omega^\epsilon}{\Gamma(-\epsilon)} \int_0^1 (1-t)^{-(\epsilon+1)}\, t^{2\alpha+\epsilon-1}\, \Phi(t\omega)\, dt.$$

Основное уравнение для вычисления спектра принимает вид

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi}{d\omega} - 2\alpha\omega\Phi + \frac{Z\,\nu^{1/\nu-2}\,\omega^{1/\nu-1}}{\Gamma(1-1/\nu)} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-t)^{-1/\nu}\, t^{2\alpha+1/\nu-2}\Phi(t\omega)\, dt = \tag{3}$$

$$= -\frac{E\,\nu^{2/\nu-2}\,\omega^{2/\nu-1}}{\Gamma(1-2/\nu)} \int_0^1 (1-t)^{-2/\nu}\, t^{2\alpha+2/\nu-2}\Phi(t\omega)\, dt.$$

Перейдем к новой переменной $y=(1-\omega)/(1+\omega)$. При этом функция $\Phi(y)$ должна быть регулярна в точке $y=0$. Для удобства представим $\Phi(y)$ в виде $\Phi(y) = [(1+y)/2]^{2\alpha} D(y)$, причем функция $D(y)$, как и $\Phi(y)$, может быть разложена в ряд по степеням y. Замена переменной в уравнении (3) приводит к выражению

$$y\,\frac{dD}{dy} + \alpha D = Z\,I(1/\nu, y) + E\,I(2/\nu, y), \tag{4}$$

где

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)}(1-y)^{\epsilon-2\alpha} \times$$

$$\times \int_y^1 (1-v)^{2\alpha+\epsilon-2}(1-y/v)^{-\epsilon} v^{-\epsilon} D(v)\, dv.$$

Далее подставляем разложение $D(y) = \sum\limits_n a_n\, y^n$ в (4) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях y^n в левой и правой частях уравнения. Это проще всего сделать с помощью прямого и обратного преобразования Меллина. Тогда приходим к бесконечной системе линейных уравнений относительно величин a_n. Эта система довольно сложна, хотя и содержит лишь произведения Г-функций. Спектр задачи получается из условия равенства нулю определителя этой системы. Эта процедура может быть выполнена с помощью вычислений на ЭВМ с любой степенью точности.

2. Рассмотрим в качестве примера притягивающий потенциал Юкавы:

$$V = -V_0\, \mathrm{e}^{-r/a}\, r.$$

В этом случае УШ при $E = -|E| < 0$ выглядит так:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \left[\frac{l(l+1)}{x^2}+1\right]\Psi + \lambda\, \mathrm{e}^{-x/b}\,\Psi = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$x = |E|^{1/2} r, \quad b = |E|^{1/2} a, \quad \lambda = V_0/|E|^{1/2}.$$

Применяя далее к УШ преобразование Лапласа, получаем уравнение для лапласовских образов:

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi}{d\omega} - 2\alpha\omega\Phi + \lambda < \mathrm{e}^{-x/b}\,\Psi >= 0, \tag{5}$$

при этом выбрано $\sigma = \alpha = \beta = l+1$. Отсюда при $b\to\infty$ можно получить уравнение в случае кулоновского потенциала:

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi}{d\omega} + (\lambda - 2\alpha\omega)\Phi = 0,$$

решение которого $\Phi = (1-\omega^2)^{-\alpha}[(1-\omega)/(1+\omega)]^{\lambda/2}$ регулярно в точке $\omega=1$ при $\lambda = 2(n_r+\alpha)$, т.е. спектр энергии имеет вид $E = -V_0^2/[4(n_r+\alpha)^2]$, $n_r = 0, 1, 2, \ldots$.

Вводя новую величину $\Omega = b\omega/(b+\omega)$, уравнение (5) можно привести к виду

$$(1-\omega^2)\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} - 2\alpha\omega\Phi(\omega) + \lambda(\Omega/\omega)^{2\alpha}\Phi(\Omega) = 0.$$

Следуя далее схеме, описанной в разделе 1, из этого уравнения получаем основную формулу, позволяющую найти спектр:

$$(n+\alpha)a_n = 2^{2\alpha-1}\lambda b^{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=n-k\\ m\geqslant 0}}^{n} a_k \times$$

$$\times \frac{(2b+1)^{-(k+m+2\alpha)}(2b-1)^{n-m}\Gamma(m+k+2\alpha)k!}{\Gamma(k+2\alpha)m!(n-m)!\Gamma(k+m-n+1)}.$$

Например, ограничиваясь лишь коэффициентами a_0 и a_1 при $l=0$, получаем приближенное характеристическое уравнение для нахождения двух нижних уровней системы:

$$8(k\lambda+1)^6 - 2\lambda(k\lambda+1)^2[3+4k\lambda(k\lambda+1)] + \lambda^2 = 0,$$

где $k=(2V_0a)^{-1}$. Отсюда легко получить спектр УШ с кулоновским потенциалом ($k\to 0$): $\lambda_0=2$ при $n_r=0$; $\lambda_1=4$ при $n_r=1$.

Авторы глубоко благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание, А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Quigg C., Rosner J.L.* // Phys. Rep. 1979. **56**. C. 167.
2. *Вшивцев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н.* // ТМФ. 1996. **109**, № 1. С. 107.
3. *Вшивцев А.С., Вшивцев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 5. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5).

Поступила в редакцию 04.06.99

УДК 517.958

О ВОЛНОВОДЕ В РЕЖИМЕ НЕВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Рассматривается задача излучения электромагнитных волн в волноводе. Устанавливается существование токов, не излучающих бегущие волны. Рассматриваемое явление согласуется с известной схемой Л. А. Вайнштейна. В то же время известные методы не позволяют выделить подобный класс решений.

В работе авторов [1] рассматривалась достаточно общая схема решения задачи возбуждения волновода с неоднородным заполнением. В настоящей работе предлагается подход, который позволяет доказать, что существуют комбинации токов и зарядов, не возбуждающие бегущие волны в волноводе.

Рассмотрим полый волновод, возбуждаемый переменным током и зарядами, расположенными в конечной области $(x,y)\in\Omega'\subset\Omega$, $z\in[z_1,z_2]$. Ток и заряды имеют вид (j_z-компонента — произвольна)

$$j_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad j_y=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \rho=-i\frac{\omega}{c^2}\psi,$$

где $\psi(x,y,z)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=\frac{\partial j_z}{\partial z},(x,y)\in\Omega,\quad \psi|_{\partial\Omega}=0,\quad (1)$$

параметр $k=\omega/c$. Таким образом, $\psi(x,y,z)$ является решением двумерной задачи, в которую переменная z входит как параметр, и функция ψ не равна тождественно нулю при $z_1<z<z_2$. Данный ток определяется своей j_z-компонентой. Легко видеть, что таким образом выбранный ток удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}-i\omega\rho=0.$$

Рассмотрим задачу возбуждения полого волновода этим током и покажем, что токи указанного вида не возбуждают бегущих волн. Для этого используем развиваемый авторами подход [1–3]. Запишем уравнения Максвелла в виде

$$a_1A_1=\frac{\partial A_2}{\partial z},\quad a_2A_2=\frac{\partial A_1}{\partial z}+J,\qquad (2)$$

$$(\operatorname{rot}H)_z+ikE_z=\frac{4\pi}{c}j_z,\quad (\operatorname{rot}E)_z-ikH_z=0,$$

где $A_1=(H_x,H_y,E_z)$, $A_2=(E_x,E_y,H_z)$, $J==(4\pi/c)(-j_y,j_x,-c\rho)$,

$$a_1=\begin{pmatrix}0 & ik & \frac{\partial}{\partial x}\\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x}\\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0\end{pmatrix}.$$

Граничные условия имеют вид

$$Hn|_{\partial Q}=0,\quad E\times n|_{\partial Q}=0.$$

Покажем, что существует решение задачи (2), имеющее вид

$$A_2\equiv 0,$$
$$(A_{1_x},A_{1_y})=\operatorname{rot}(\phi e_z),\quad A_{1_z}=ik\phi,$$

где $\phi=\int\limits_{z_1}^{z}\psi dz$. При этом вне области $z_1<z<z_2$ поле $A_1(x,y,z)=0$. То есть ток указанного вида не возбуждает бегущих волн. Действительно, в силу того что, по предположению,

$$A_1=(\operatorname{rot}(\phi e_z),ik\phi),\quad A_2=0,$$

и, как легко проверить, $a_1A_1=0$, первое уравнение (2) выполняется для любого вектора указанного типа. Второе уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial A_1}{\partial z}=J.$$

Это уравнение имеет решение, обращающееся в нуль при $z\leqslant z_1$, вида

$$A_1=-\int\limits_{-\infty}^{z}Jdz.$$