

где $k = (2V_0 a)^{-1}$. Отсюда легко получить спектр УШ с кулоновским потенциалом ($k \rightarrow 0$): $\lambda_0 = 2$ при $n_r = 0$; $\lambda_1 = 4$ при $n_r = 1$.

Авторы глубоко благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание, А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение результатов работы.

УДК 517.958

О ВОЛНОВОДЕ В РЕЖИМЕ НЕВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Рассматривается задача излучения электромагнитных волн в волноводе. Устанавливается существование токов, не излучающих бегущие волны. Рассматриваемое явление согласуется с известной схемой Л. А. Вайнштейна. В то же время известные методы не позволяют выделить подобный класс решений.

В работе авторов [1] рассматривалась достаточно общая схема решения задачи возбуждения волновода с неоднородным заполнением. В настоящей работе предлагается подход, который позволяет доказать, что существуют комбинации токов и зарядов, не возбуждающие бегущие волны в волноводе.

Рассмотрим полый волновод, возбуждаемый переменным током и зарядами, расположенными в конечной области $(x, y) \in \Omega' \subset \Omega, z \in [z_1, z_2]$. Ток и заряды имеют вид (j_z -компонента — произвольна)

$$j_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad j_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho = -i\frac{\omega}{c^2}\psi,$$

где $\psi(x, y, z)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = \frac{\partial j_z}{\partial z}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

параметр $k = \omega/c$. Таким образом, $\psi(x, y, z)$ является решением двумерной задачи, в которую переменная z входит как параметр, и функция ψ не равна тождественно нулю при $z_1 < z < z_2$. Данный ток определяется своей j_z -компонентой. Легко видеть, что таким образом выбранный ток удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} - i\omega\rho = 0.$$

Рассмотрим задачу возбуждения полого волновода этим током и покажем, что токи указанного вида не возбуждают бегущих волн. Для этого используем развиваемый авторами подход [1–3]. Запишем уравнения Максвелла в виде

$$a_1 A_1 = \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad a_2 A_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} + J, \quad (2)$$

Литература

1. Quigg C., Rosner J.L. // Phys. Rep. 1979. **56**. С. 167.
2. Вишивцев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н. // ТМФ. 1996. **109**, №1. С. 107.
3. Вишивцев А.С., Вишивцев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №5. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5).

Поступила в редакцию 04.06.99

$$(\text{rot } H)_z + ikE_z = \frac{4\pi}{c}j_z, \quad (\text{rot } E)_z - ikH_z = 0,$$

где $A_1 = (H_x, H_y, E_z)$, $A_2 = (E_x, E_y, H_z)$, $J = (4\pi/c)(-j_y, j_x, -c\rho)$,

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия имеют вид

$$Hn|_{\partial Q} = 0, \quad E \times n|_{\partial Q} = 0.$$

Покажем, что существует решение задачи (2), имеющее вид

$$A_2 \equiv 0,$$

$$(A_{1x}, A_{1y}) = \text{rot}(\phi e_z), \quad A_{1z} = ik\phi,$$

где $\phi = \int_{z_1}^z \psi dz$. При этом вне области $z_1 < z < z_2$

поле $A_1(x, y, z) = 0$. То есть ток указанного вида не возбуждает бегущих волн. Действительно, в силу того что, по предположению,

$$A_1 = (\text{rot}(\phi e_z), ik\phi), \quad A_2 = 0,$$

и, как легко проверить, $a_1 A_1 = 0$, первое уравнение (2) выполняется для любого вектора указанного типа. Второе уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial A_1}{\partial z} = J.$$

Это уравнение имеет решение, обращающееся в нуль при $z \leq z_1$, вида

$$A_1 = - \int_{-\infty}^z J dz.$$

При этом A_1 обращается в нуль при $z < z_1$, поскольку $J(x, y, z) = 0$ при $z < z_1$ и $z > z_2$. Так что при $z > z_1$ решение принимает вид $A_1 = - \int_{z_1}^z J dz$.

Покажем, что A_1 обращается в нуль при $z \geq z_2$.

Поскольку $J = (\text{rot}(\psi e_z), ik\psi)$, то вектор A_1 действительно имеет вид $A_1 = (\text{rot}(\phi e_z), ik\phi)$. Достаточно показать, что $\phi = 0$ при $z \geq z_2$. Определим ψ , являющееся решением задачи (1), спектральным методом. Пусть ψ_n — собственные функции задачи

$$\left(\text{rot}(\text{rot}(\psi_n e_z)) \right)_z - k^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \psi_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Будем искать решение задачи (1) в форме

$$\psi = \sum_n a_n(z) \psi_n(x, y).$$

Представим правую часть в виде ряда по собственным функциям:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial j_z}{\partial z} &= -\sum_n \left(\int_{\Omega} \frac{\partial j_z}{\partial z} \psi_n dS \right) \psi_n(x, y) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \sum_n \left(\int_{\Omega} j_z \psi_n dS \right) \psi_n(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$a_n(z) = -\frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} j_z \psi_n dS.$$

Отсюда получаем ψ :

$$\psi = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} j_z \psi_n dS \right) \psi_n,$$

а

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{z_1}^z \psi dz = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_{z_1}^z \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega} j_z \psi_n dS \right) \psi_n = \\ &= -\sum_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_{\Omega} j_z(x, y, z) \psi_n dS \right) \psi_n. \end{aligned}$$

При $z \geq z_2$ по условию $j_z = 0$, следовательно, и функция ϕ , и вектор A_1 равны нулю при $z > z_2$. Таким образом, мы установили, что ток вида $J = (\text{rot}(\psi e_z), ik\psi)$, где $\psi(x, y, z)$ — решение задачи (1) с произвольной правой частью, не возбуждает бегущих волн.

Покажем, что полученный результат согласуется с достаточно распространенной схемой Л. А. Вайнштейна [4]. В этом методе предполагается, что вне области, занятой токами, поле может быть разложено в ряды по нормальным волнам вида

$$E = \sum_n c_{\pm n} E_{\pm n} \exp(\pm i\gamma_n z),$$

$$H = \sum_n c_{\pm n} H_{\pm n} \exp(\pm i\gamma_n z),$$

где $E_{\pm n} \exp(\pm i\gamma_n z)$, $H_{\pm n} \exp(\pm i\gamma_n z)$ — нормальные волны или решения модового вида однородной системы Максвелла. Коэффициенты $c_{\pm n}$ в случае локального тока $\text{supp } j \subset ((x, y) \in \Omega, z \in [z_1, z_2])$ при $z < z_1$ и $z > z_2$ вычисляются следующим образом:

$$c_{\pm n} = \int_{\Omega} \int_{z_1}^{z_2} (j E_{\pm n}) \exp(\pm i\gamma_n z) dz dS.$$

Коэффициенты $c_{\pm n}$ в данном случае будут равны нулю. Как известно [5, 6], $E_n(x, y)$ с точностью до константы, общей для всех n , имеет либо вид

$$E_{z_n} = 0, \quad E_{x_n} = \frac{ik}{k^2 - \gamma_n^2} \frac{\partial H_{z_n}}{\partial y}, \quad E_{y_n} = -\frac{ik}{k^2 - \gamma_n^2} \frac{\partial H_{z_n}}{\partial x},$$

либо вид

$$E_{z_n} \neq 0, \quad E_{x_n} = \frac{i\gamma_n}{k^2 - \gamma_n^2} \frac{\partial E_{z_n}}{\partial x}, \quad E_{y_n} = \frac{i\gamma_n}{k^2 - \gamma_n^2} \frac{\partial E_{z_n}}{\partial y},$$

где E_{z_n} - и H_{z_n} -компоненты являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 E_{z_n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z_n}}{\partial y^2} + k^2 E_{z_n} = \gamma_n^2 E_{z_n},$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad E_{z_n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_{z_n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z_n}}{\partial y^2} + k^2 H_{z_n} = \gamma_n^2 H_{z_n},$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial H_{z_n}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Подставляя поля E_n, H_n в формулы для вычисления коэффициентов $c_{\pm n}$, убеждаемся в том, что

$$c_{+n} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\Omega} (j E_n) \exp(\pm i\gamma_n z) dz dS = 0.$$

Поэтому бегущие волны не возбуждаются. Полученные результаты можно распространить на случай возбуждения локальным током и зарядом регулярного волновода с произвольным заполнением. Однако этот значительно более сложный случай заслуживает специального рассмотрения и будет предметом отдельной публикации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01081).

Литература

1. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №4. С. 6 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 4).

2. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свейников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1998. №11. С. 1981.
3. Делицын А.Л. // ЖВМ и МФ. 1999. №2. С. 315.
4. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1988.
5. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в элект-

родинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свейников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.

Поступила в редакцию
07.07.99

УДК 530.145

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ В $d = 2 + 1$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков

(кафедра теоретической физики)

Вычислен бозонный однопетлевой вклад в эффективный потенциал калибровочного поля. В качестве внешнего фонового поля были выбраны точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (классической неабелевой теории поля) с чери-саймоновской массой в пространстве размерности $d = 2 + 1$. В этом поле найдены пропагаторы кварков и глюонов. Вычислены также однопетлевой массовый оператор и радиационный сдвиг энергии фермиона для случая, когда его масса равна $m = \theta/4$.

В 1981 г. Дж. Шонфельд и позднее, в 1982 г., С. Дезер, Р. Джаквиз и С. Темплтон показали, как можно построить калибровочно-инвариантную теорию с массивным калибровочным полем [1]. С тех пор $(2 + 1)$ -мерные теории привлекают к себе внимание не только своей необычностью: интерес к массивным калибровочным теориям подогревается их способностью предсказывать и описывать замечательные физические эффекты, примерами которых могут служить квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

Исследованию структуры вакуума калибровочных теорий посвящено множество работ. Одним из направлений в изучении свойств вакуума является вычисление и анализ однопетлевого эффективного потенциала на фоне заданного внешнего поля — конденсата. В данной заметке рассмотрен однопетлевой вклад в эффективный потенциал. Условия возникновения конденсата не рассматриваются.

Для двумерной $SU(2)$ -глюодинамики потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A_\mu^a/2$, где $a = 1, 2, 3$, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\theta}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha} \left(F_{\mu\nu}^a A_\alpha^a - \frac{g}{3}\epsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) - \frac{1}{2\xi} \left(D_\mu^{ab} a^{b\mu} \right)^2 + \left(D_\mu^{ab} \bar{\eta}^b \right) (\nabla^{ac\mu} \eta^c), \quad (1)$$

где напряженность $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, полное поле представляется в виде суммы классического и квантованного полей: $A_\mu = A_\mu^{\text{ext}} + a_\mu$, $\nabla_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - g\epsilon^{acb}A_\mu^c$, $D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - g\epsilon^{acb}A_\mu^c$, а $\bar{\eta}^b$ и η^b — поля духов. Коэффициент θ в (1) играет роль массы калибровочного поля. В качестве внешнего поля выберем точное решение уравнения

Янга–Миллса [2]

$$A^{a\mu\text{ext}} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi_{\lambda\omega}^{(a)}, \quad (2)$$

где единичный вектор $\chi_{\lambda\omega}^{(a)} = (\lambda i, \lambda \omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$.

Для заданной конфигурации внешнего поля (2) плотность энергии определяется из симметризованного тензора энергии-импульса и оказывается равной $E = T^{00} = -\theta^4/(32g^2)$.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}_G^{(1)} + \mathcal{E}_Q^{(1)}$$

с учетом вкладов как глюонной ($\mathcal{E}_G^{(1)}$), так и кварковой ($\mathcal{E}_Q^{(1)}$) петель. Для этого достаточно рассмотреть линейризованные уравнения полей или, что эквивалентно этому, оставить в лагранжиане (1) лишь квадратичные члены. Это было сделано в работе [2], но, к сожалению, там была допущена существенная неточность при вычислении глюонного вклада: 1) в эффективном потенциале учтены все ветви энергетического спектра, включая и те, которые отвечают нефизическим степеням свободы глюонов; 2) потерян множитель $1/2$ в формуле для глюонного вклада в эффективный потенциал, происхождение которого вполне ясно из выражения для однопетлевого поляризационного вклада в энергию вакуума за счет глюонных петель $\mathcal{E}_G^{(1)} = -\ln \text{Det}^{-1/2} D^{-1}$. Нефизический вклад глюонов исключается вследствие учета духов. Рассмотрим вклад духов. Уравнения движения для духов имеют вид

$$(D^2)^{ab}\eta^b = 0,$$