2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1998. № 11. С. 1981.
3. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 1999. № 2. С. 315.
4. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1988.
5. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
6. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.

Поступила в редакцию
07.07.99

УДК 530.145

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ В $d = 2 + 1$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков

(*кафедра теоретической физики*)

Вычислен бозонный однопетлевой вклад в эффективный потенциал калибровочного поля. В качестве внешнего фонового поля были выбраны точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (классической неабелевой теории поля) с черн-саймоновской массой в пространстве размерности $d = 2 + 1$. В этом поле найдены пропагаторы кварков и глюонов. Вычислены также однопетлевой массовый оператор и радиационный сдвиг энергии фермиона для случая, когда его масса равна $m = \theta/4$.

В 1981 г. Дж. Шонфельд и позднее, в 1982 г., С. Дезер, Р. Джакив и С. Темплтон показали, как можно построить калибровочно-инвариантную теорию с массивным калибровочным полем [1]. С тех пор $(2+1)$-мерные теории привлекают к себе внимание не только своей необычностью: интерес к массивным калибровочным теориям подогревается их способностью предсказывать и описывать замечательные физические эффекты, примерами которых могут служить квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

Исследованию структуры вакуума калибровочных теорий посвящено множество работ. Одним из направлений в изучении свойств вакуума является вычисление и анализ однопетлевого эффективного потенциала на фоне заданного внешнего поля — конденсата. В данной заметке рассмотрен однопетлевой вклад в эффективный потенциал. Условия возникновения конденсата не рассматриваются.

Для двумерной $SU(2)$-глюодинамики потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A^a_\mu/2$, где $a = 1, 2, 3$, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} - \frac{\theta}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left(F^a_{\mu\nu}A^a_\alpha - \frac{g}{3}\varepsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\alpha\right) - \\ - \frac{1}{2\xi}\left(D^{ab}_\mu a^{b\,\mu}\right)^2 + \left(D^{ab}_\mu \overline{\eta}^b\right)\left(\nabla^{ac\,\mu}\eta^c\right), \qquad (1)$$

где напряженность $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$, полное поле представляется в виде суммы классического и квантованного полей: $A_\mu = A^{\rm ext}_\mu + a_\mu$, $\nabla^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{acb}A^c_\mu$, $D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{acb}A^{c\,\rm ext}_\mu$, а $\overline{\eta}^b$ и η^b — поля духов. Коэффициент θ в (1) играет роль массы калибровочного поля. В качестве внешнего поля выберем точное решение уравнения Янга–Миллса [2]

$$A^{a\,\mu\,\rm ext} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi^{(a)}_{\lambda\omega}, \qquad (2)$$

где единичный вектор $\chi^{(a)}_{\lambda\omega} = (\lambda i, \lambda\omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$.

Для заданной конфигурации внешнего поля (2) плотность энергии определяется из симметризованного тензора энергии-импульса и оказывается равной $E = \mathcal{T}^{00} = -\theta^4/(32g^2)$.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\rm eff} = E + \mathcal{E}^{(1)}_G + \mathcal{E}^{(1)}_Q$$

с учетом вкладов как глюонной ($\mathcal{E}^{(1)}_G$), так и кварковой ($\mathcal{E}^{(1)}_Q$) петель. Для этого достаточно рассмотреть линеаризованные уравнения полей или, что эквивалентно этому, оставить в лагранжиане (1) лишь квадратичные члены. Это было сделано в работе [2], но, к сожалению, там была допущена существенная неточность при вычислении глюонного вклада: 1) в эффективном потенциале учтены *все* ветви энергетического спектра, включая и те, которые отвечают нефизическим степеням свободы глюонов; 2) потерян множитель $1/2$ в формуле для глюонного вклада в эффективный потенциал, происхождение которого вполне ясно из выражения для однопетлевого поляризационного вклада в энергию вакуума за счет глюонных петель $\mathcal{E}^{(1)}_G = -\ln {\rm Det}^{-1/2}\, D^{-1}$. Нефизический вклад глюонов исключается вследствие учета духов. Рассмотрим вклад духов. Уравнения движения для духов имеют вид

$$(D^2)^{ab}\eta^b = 0,$$

где $(D^2)^{ab} = D^{ac}_{\mu} D^{cb\,\mu}$. Эти уравнения позволяют найти спектр энергии духов, который определяется из следующего условия:

$$\det\left[\left(p^2 + \tfrac{1}{2}\theta^2\right)\delta^{ab} + i\theta\varepsilon^{abc}\delta^{c\mu}\chi^{(c)}_{\lambda\omega}p_{\mu}\right] = 0.$$

Полученное уравнение дает три ветви энергии: $\varepsilon^2_{\mathrm{gh}\,i} = \mathbf{p}^2 + (1/2)\zeta_i\theta^2$, где $\zeta_1 = -1$, $\zeta_{2,3} = \pm i$. Вклад духов в эффективный потенциал дается равенством

$$\mathcal{E}^{(1)}_{G\ \mathrm{unphys}} = -\sum_{\mathbf{p},i}\varepsilon_{\mathrm{gh}\,i}(\mathbf{p}).$$

Знак «минус» перед суммой определяется ферми-статистикой духов. Так же как в случае глюонов, ветвь $\varepsilon_{\mathrm{gh}\,1}$ вносит вклад только в мнимую часть эффективного потенциала (см. [2]). Поэтому

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(1)}_{G\ \mathrm{unphys}} = -\frac{1}{12\sqrt{2}\pi}|\theta|^3.$$

Две оставшиеся экзотические ветви энергии, как легко видеть, вносят вклад лишь в вещественную часть:

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{E}^{(1)\mathrm{reg}}_{G\ \mathrm{unphys}} = -\mu^{2\epsilon}\sum_{\mathbf{p},i=2,3}[\mathbf{p}^2 + \tfrac{1}{2}\zeta_i\theta^2]^{1/2-\epsilon} = -\frac{\mu^2}{2\pi\Gamma(\epsilon - \frac{1}{2})}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^{5/2-\epsilon}}\cos\frac{s\theta^2}{2}.$$

Несложные вычисления приводят к следующему результату: $\mathrm{Re}\,\mathcal{E}^{(1)}_{G\ \mathrm{unphys}} = -[1/(12\pi)]|\theta|^3$.

Таким образом, получаем выражение для вклада бозонного сектора в $d = 3$ эффективный потенциал:

$$V_{\mathrm{eff}} \equiv E + \mathrm{Re}\,\mathcal{E}^{(1)}_G = -\frac{\theta^4}{32g^2} - \frac{|\theta|^3}{2\pi}\left(1 + \frac{3\sqrt{6}}{4}\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(1)}_G = -\frac{7}{24\sqrt{2}\pi}|\theta|^3.$$

Представляет интерес рассмотреть радиационный сдвиг энергии кварка, находящегося во внешнем поле $A^{a\,\mathrm{ext}}_{\mu}$, заданном постоянным потенциалом (2). В этом поле были найдены пропагаторы кварков и глюонов. Функция Грина для кварков в импульсном представлении оказывается равной

$$S(p) = [(p^2 - m^2_{\mathrm{eff}\,1})(p^2 - m^2_{\mathrm{eff}\,2})]^{-1} \times \times\Big\{[p^2 - (m - \tfrac{1}{4}\theta)^2][\gamma^{\mu}(p_{\mu} + gA_{\mu}) + m] - - 2(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m - \tfrac{1}{4}\theta)[gA^{\nu}p_{\nu} + \tfrac{1}{4}\theta(m - \tfrac{1}{4}\theta)]\Big\},$$

где $m^2_{\mathrm{eff}\,1} = (m - \theta/4)^2$ и $m^2_{\mathrm{eff}\,2} = (m + \theta/4)^2 - \theta^2/4$. Пропагатор флуктуаций глюонного поля во внешнем глюонном поле (2) примет следующий вид:

$$D^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{E}}{2\alpha}\right) - \frac{4g^2}{\theta^2}A^a_{\mu}A^b_{\nu}\left(\frac{1}{3\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{3\beta}\right) + + \frac{4g^2}{\theta^2}A^a_{\nu}A^b_{\mu}\left(\frac{1}{2\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{2\alpha}\right) + \frac{16g^2\mathcal{E}}{\theta^2\alpha\beta}F^a_{\mu\alpha}F^b_{\nu\beta}p^{\alpha}p^{\beta} + + \frac{8ig^2}{\theta^2\beta}(F^a_{\mu\alpha}A^b_{\nu} - F^b_{\nu\alpha}A^a_{\mu})p^{\alpha} + \frac{16ig^2}{\theta^3\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F^a_{\mu\alpha}F^b_{\nu\beta}p_{\gamma},$$

где $\mathcal{E} = p^2 + \frac{1}{2}\theta^2$, $\alpha = \mathcal{E}^2 - 4\theta^2p^2$ и $\beta = \mathcal{E}^2 - 6\theta^2p^2$.

Наиболее интересна ситуация, когда $m = \theta/4$. Помимо того, что в этом случае эффективные массы кварков оказываются равными нулю, при условии $m_{\mathrm{eff}\,1} = m_{\mathrm{eff}\,2} = 0$ состояния кварков становятся неразличимыми по цвету. Решением уравнения Дирака является плоская волна $\psi(x) = (2\pi)^{-1}\exp(-i\varepsilon t + i\mathbf{px})u(p)$, где $u(p)$ — постоянный спинор. Решая уравнение Дирака при $p \neq 0$, найдем:

$$u(p) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} [\lambda(\kappa-1)+(\kappa+1)]\,[(\omega+1)\,\mathrm{e}^{i\phi} + (\omega-1)] \\ -[\lambda(\kappa-1)-(\kappa+1)]\,[(\omega-1)\,\mathrm{e}^{-i\phi} + (\omega+1)] \\ [\lambda(\kappa+1)-(\kappa-1)]\,[(\omega-1)\,\mathrm{e}^{i\phi} + (\omega+1)] \\ [\lambda(\kappa+1)+(\kappa-1)]\,[(\omega+1)\,\mathrm{e}^{-i\phi} + (\omega-1)] \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь две верхние компоненты спинора описывают одно цветовое состояние, а две нижние компоненты — другое, $\kappa = \pm 1$ — знак энергии ($\varepsilon \equiv p_0 = \kappa|\mathbf{p}|$). Фазу ϕ определяют соотношения $p^2 \pm ip^1 = |\mathbf{p}|\,\mathrm{e}^{\pm i\phi}$.

Однопетлевая поправка к энергии кварка дается формулой

$$\Delta\varepsilon = -\frac{i}{T}\iint d^3x\,d^3x'\,\bar{\psi}_k(x)M_{kl}(x,x')\psi_l(x'),$$

где

$$iM_{kl}(x,y) = -ig^2\gamma^{\mu}(T^a)_{kn}S_{nm}(x,y)\gamma^{\nu}(T^b)_{ml}D^{ab}_{\mu\nu}(x,y)$$

представляет собой однопетлевой массовый оператор. Нетрудно найти эти величины в импульсном представлении:

$$\Delta\varepsilon = (2\pi)^{-2}\bar{u}_k(p)iM_{kl}(p)u_l(p),$$

$$iM_{kl}(p) = ig^2\gamma^{\mu}(T^a)_{kn} \times \times \int d^3k\,S_{nm}(p-k)\gamma^{\nu}(T^b)_{ml}D^{ab}_{\mu\nu}(k).$$

Таким образом, массовый оператор примет вид

$$iM(p) = ig^2\frac{\pi^2\sqrt{2}}{|\theta|}\left[-b_1\theta + \frac{5}{9}\left(\frac{2}{\theta}gA^{\mu} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu}\right)p_{\mu} - - gA^{\mu}\gamma^{\nu}(b_2\,g_{\mu\nu} - b_3\,\theta^{-2}p_{\mu}p_{\nu})\right],$$

где b_i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ — постоянные коэффициенты:

$$b_1 = \frac{5}{6} - \frac{i}{12}(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}), \quad b_2 = \frac{10}{9} + \frac{i}{9}(8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}),$$

$$b_3 = \frac{4}{45} - \frac{4\sqrt{3}i}{15}.$$

Усредняя массовый оператор по состоянию (3), получаем выражение для $\Delta\varepsilon$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{5\sqrt{2}}{72} i g^2 |\theta|^{-1} \left(p_0 - \kappa\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}\right) \equiv 0.$$

Следует подчеркнуть, что этот результат справедлив для любых ненулевых значений импульса $\mathbf{p} = (p^1,\, p^2)$. Таким образом, в случае $m = \theta/4$ фермионы остаются безмассовыми и в однопетлевом приближении.

Литература

1. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* // Ann. of Phys. (N. Y.). 1982. **140**. P. 372; *Schönfeld N.* // Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 157.
2. *Жуковский В.Ч., Песков Н.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №2. С. 60 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 2).

Поступила в редакцию
03.11.99