УДК 530.1

ГИБРИДНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА В МОДЕЛИ ЯНГА–МИЛЛСА

Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Описана схема использования гибридной перенормировки в модели Янга–Миллса. Показано, что эта перенормировка позволяет избежать появления паразитных аномалий при киральных преобразованиях.

Недавно автором была предложена новая перенормировочная процедура, названная гибридной перенормировкой [1]. Отличительная особенность этой процедуры состоит в том, что в ней фигурируют только четырехкомпонентные спиноры. Поэтому она лишена тех недостатков широко используемой в настоящее время размерной регуляризации, которые не позволяют применять последнюю в суперсимметричных моделях.

В статье [1] в качестве иллюстрации предложенная перенормировка применена в суперсимметричной модели Весса–Зумино [2, 3]. В настоящей статье на примере модели Янга–Миллса демонстрируется, как этот вариант перенормировки можно использовать в калибровочных теориях. Модель Янга–Миллса уже достаточно хорошо изучена, поэтому интерес представляет не тот факт, что найдена еще одна схема ее перенормировки, а то, что эта схема одновременно успешно работает как в суперсимметричных, так и в калибровочных моделях.

В дальнейшем будут использованы те же обозначения, что и в статье [1], ссылки на формулы статьи [1] будут даваться по образцу (1.16) (формула (16) статьи [1]).

В качестве обобщенного лагранжиана модели Янга–Миллса примем выражение

$$L(\varphi) = -\frac{1}{4} F^a_{\tau\sigma}\, F^{a\tau\sigma} - \frac{1}{2\xi}\partial^\tau A^a_\tau \partial^\sigma A^a_\sigma + \partial_\tau \bar{c}^a\, D^\tau c^a + \sum_j \bar{\psi}_j (i\hat{D} - m)\psi_j + \frac{i}{M}\sum_j \mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s} (D_\alpha \psi_j)^+ \gamma_0\gamma_5 (D^\alpha \psi_j). \tag{1}$$

Здесь D — ковариантные производные ($\hat{D} = \gamma_\mu D^\mu$); φ — единое обозначение для всех полей; τ, σ — лоренцевские индексы полного пространства, μ и α — то же самое для физического и теневого пространств соответственно; M — массовый параметр, $\mathcal{M}_j$ — безразмерные вспомогательные параметры.

Действие $S(\varphi)$, определяемое лагранжианом (1), инвариантно относительно следующих БРС-преобразований [4]:

$$\delta\psi_j = -i\, g\, t_a\, c^a \psi_j\, \delta\lambda, \quad \delta c^a = -(1/2)\, g\, f_{abc}\, c^b c^c\, \delta\lambda,$$
$$\delta A_\tau = \partial_\tau c^a + g\, f_{abc}\, c^b A^c_\tau\, \delta\lambda, \quad \delta\bar{c}^a = (1/\xi)\, \partial^\tau A^a_\tau\, \delta\lambda. \tag{2}$$

Так как преобразования (2) нелинейны, то для получения тождеств Уорда к пертурбативной части $W(\varphi)$ действия $S(\varphi)$ нужно добавить $W(\varphi; J)$ (см. формулу (1.16)):

$$W(\varphi; J) = i\int dx \Big[J^{a\tau}_A D^{ab}_\tau c^b - (1/2)\, g\, f_{abc}\, J^a_C c^b c^c - i g\, \bar{J}_{\psi j} t_a \psi_j c^a + i g\, c^a \bar{\psi}_j t_a J_{\bar{\psi} j} \Big].$$

Благодаря нильпотентности преобразований (2) действие $W(\varphi; J)$ инвариантно относительно них (см. [5]).

Формально лагранжиану $L(\varphi)$ соответствует неперенормируемая модель. За неперенормируемость ответственны слагаемые в правой части формулы (1), пропорциональные M^{-1}. Однако неперенормируемости можно избежать, используя дополнительные ограничения типа обобщенных условий Паули–Вилларса. Пропагаторы спинорных полей ψ_j, получающиеся из лагранжиана $L(\varphi)$, имеют вид

$$S_j = \frac{1}{(2\pi)^4}\, \frac{\hat{p} + m + i\, M^{-1}\mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s}\mathbf{p}^2\gamma_5}{m^2 + M^{-2}\mathcal{M}_j^{-2/\varepsilon_s}\mathbf{p}^4 - \vec{p}^{\,2}}. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторый замкнутый спинорный цикл. Соответствующее ему выражение имеет структуру

$$\mathcal{F}_j = \int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon_s)\, F\Big(\vec{p}, \mathcal{M}_j^{-1/(2\varepsilon_s)}\mathbf{p}, \mathcal{M}_j^{-1/(2\varepsilon_s)}\Big).$$

Регуляризованный интеграл $\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon_s)$, определенный формулой (1.8), эквивалентен интегралу $\int d^4\vec{p} \int d^{2\varepsilon_s}\mathbf{p}$ в формализме размерной регуляризации, поэтому после замены $\mathbf{p} \to \mathcal{M}_j^{1/(2\varepsilon_s)}\mathbf{p}$ величина $\mathcal{F}_j$ приобретет вид

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{M}_j \int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon_s)\, F\Big(\vec{p}, \mathbf{p}, \mathcal{M}_j^{-1/(2\varepsilon_s)}\Big).$$

Легко убедиться в том, что при достаточно малом ε_s и $\mathcal{M}_j \to \infty$ предел выражения $\mathcal{M}_j^{-1}\mathcal{F}_j$ существует. При этом исчезают все слагаемые, содержащие вершины, которые принадлежат к рассматриваемому циклу и в дальнейшем могли бы привести к неперенормируемости. Однако предел величины $\mathcal{F}_j$, конечно, не существует.

Чтобы обойти эту трудность, будем считать, что из всех полей $\bar{\psi}_j$, ψ_j только поля $\bar{\psi}_1$, ψ_1 физические, а остальные спинорные поля вспомогательные. Причем некоторые из этих полей являются фермионными, а остальные бозонными. Введем параметр $\mathcal{C}$, равный $+1$ для фермионных и -1 для бозонных полей ψ. Подчиним $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{M}_j$ дополнительным условиям:

$$\sum_j \mathcal{C}_j = 1, \qquad \sum_j \mathcal{C}_j \mathcal{M}_j = 1. \tag{4}$$

Этого всегда можно достигнуть: например, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}_3 = 1$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}+1$, $\mathcal{M}_3 = 2\mathcal{M}+1$. При выполнении условий (4) и $\mathcal{M} \to \infty$ предел выражения $\sum_j \mathcal{F}_j$ будет существовать. Эта техника очень близка к той, которая используется в [6] для регуляризации спинорных циклов, но служит несколько иным целям. Условия (4) обеспечивают не промежуточную регуляризацию, а возможность совершить предельный переход по $\mathcal{M}$ и избавиться от вершин, опасных с точки зрения перенормируемости модели.

Имея в виду изложенную только что технику расчета спинорных циклов, распределим все поля по двум типам: спинорные $\varphi^s = \{\bar{\psi}_j \psi_j\}$ и калибровочные $\varphi^g = \{A^a_\tau, c^a, \bar{c}^a\}$. Соответственно этому, как показано в статье [1], производящий функционал для перенормированных функций Грина можно представить в виде

$$Z(j,J) = \lim_{\varepsilon_g \to \infty} \lim_{\varepsilon_s \to \infty} Z(j,J;\varepsilon_g,\varepsilon_s), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Z(j,J;\varepsilon_g,\varepsilon_s) &= \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta^g_r(\varepsilon_g)] \lim_{\mathcal{M}\to\infty} \times \\ &\times \exp[\Delta^s_r(\varepsilon_s)] \exp[iW(\varphi) + iW(\varphi,J)]\, C(j,\varphi)\big|_{\varphi=0} = \\ &= \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \lim_{\mathcal{M}\to\infty} \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \\ &\quad\times \exp[iW_\Lambda(\varphi) + iW_\Lambda(\varphi,J)]\, C(j,\varphi)\big|_{\varphi=0}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь соответствующие формулы статьи [1] дополнены операцией предельного перехода по параметру $\mathcal{M}$. Фигурирующие в (5) операторы $\Delta^h(\varepsilon_h)$ $(h = r, s)$ определены формулой (1.4), а операторы $\Delta^h_r(\varepsilon_h)$ описаны сразу же после формулы (1.13).

Для получения тождеств Уорда нужно показать (см. [1]), что равна нулю величина

$$\begin{aligned} R = \mathcal{N}^{-1} \Big\{ &\int d\mu(p;\varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \lim_{\mathcal{M}\to\infty} \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \\ &\times f_{v\Lambda}(p;\varphi) \left[\varphi^g_u(-p) D^g_{uv}(p)^{-1} - \delta W_\Lambda(\varphi)/\delta\varphi^g_v(p)\right] + \\ &+ \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \lim_{\mathcal{M}\to\infty} \int d\mu(p;\varepsilon_s) \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \\ &\times f_{v\Lambda}(p;\varphi) \left[\varphi^s_u(-p) D^s_{uv}(p)^{-1} - \delta W_\Lambda(\varphi)/\delta\varphi^s_v(p)\right] \Big\} \times \\ &\times \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j,\varphi) \Big|_{\varphi=0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что все свертки по спинорным полям совершаются в первую очередь. Сразу после действия оператора $\exp[\Delta^s(\varepsilon_s)]$ получится выражение, которое соответствует не связанным между собой спинорным циклам и незамкнутым спинорным трекам.

Рассмотрим первое слагаемое в фигурных скобках в правой части формулы (7). В нем можно поменять местами операции $\int d\mu(p;\varepsilon_g)$ и $\exp[\Delta^g(\varepsilon_g)]$. После этого импульс p перестанет быть петлевым. Поэтому можно заменить $\int d\mu(p;\varepsilon_g)$ на $\int dp$ и поменять местами $\int dp$ и $\exp[\Delta^s(\varepsilon_s)]$. В результате формула (7) приобретет вид

$$\begin{aligned} R = \mathcal{N}^{-1} &\exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \lim_{\mathcal{M}\to\infty} \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \exp[iW_\Lambda(\varphi)] \times \\ &\times C(j,\varphi) \int dp \sum_{h=g,s} f_{v\Lambda}(p;\varphi) \times \\ &\times \left[\varphi^h_u(-p) D^h_{uv}(p)^{-1} - \delta W_\Lambda(\varphi)/\delta\varphi^h_v(p)\right]\Big|_{\varphi=0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Предельный переход по $\mathcal{M}$ в формуле (8) приводит к двум важным результатам. Во-первых, исчезают члены с существенной особенностью по ε_s (типа $\mathcal{M}^{-1/\varepsilon_s}$), во-вторых, исчезают члены, в которых фигурируют нестандартные для модели Янга–Миллса вершины. Изначально такие вершины возникают благодаря слагаемым, пропорциональным M^{-1}, в лагранжиане $L(\varphi)$ (формула (1)). На стадии вычисления спинорных циклов эти нестандартные вершины полезную роль уже сыграли. Благодаря им интегрирование по петлевому импульсу в обычном четырехмерном пространстве эффективно заменяется интегрированием в пространстве с размерностью $4 + 2\varepsilon_s$. В результате этого ультрафиолетовые расходимости замещаются полюсными особенностями по ε_s. Эти особенности могут быть устранены либо заменой операции $\Delta^s(\varepsilon_s)$ на операцию $\Delta^s_r(\varepsilon_s)$, либо введением соответствующих контрчленов, коэффициенты в которых имеют полюсную зависимость от ε_s.

Из формулы (8) следует, что для доказательства равенства нулю величины R достаточно убедиться в инвариантности перенормированного действия относительно перенормированных преобразований (2). Так же как в случае модели Весса–Зумино, рассмотренной в [1], это можно сделать с помощью индукции по числу петель. Рассуждения здесь оказываются несколько более сложными, чем в модели Весса–Зумино. Прежде всего, в перенормируемом действии помимо структур, фигурирующих в правой части формулы (1), требуются структуры вида

$$g_1 F^a_{\mu\alpha} F^{a\,\mu\alpha} + g_2 F^a_{\beta\alpha} F^{a\,\beta\alpha},$$

где индексы α, β относятся к теневому пространству, а μ — к физическому. Далее, контрчлены могут зависеть от двух параметров ε: ε_s и ε_g. При выявлении полюсной структуры надо учитывать, что сначала к нулю стремится ε_s, а лишь затем ε_g. Наконец, после перехода к производящему функционалу $\Gamma(\varphi)$ для сильно связанных функций Грина вместо линейного уравнения (типа (1.28)) получится квадратичное уравнение относительно вариационных производных $\Gamma(\varphi)$. Это является следствием нелинейности преобразований (2).

Несмотря на все эти усложнения, основное обстоятельство оказывается неизменным. Оно заключается в том, что все коэффициенты в контрчленах имеют чисто полюсную зависимость от ε_s и ε_g. Это позволяет с очень небольшими изменениями повторить приведенные во втором томе монографии [5] рассуждения, которые используются при доказательстве в рамках схемы минимальных вычитаний тождеств Уорда для модели с неабелевыми калибровочными полями.

Рассмотрим теперь локальное (в физическом пространстве) киральное преобразование

$$\delta\psi_j(\vec{p},\mathbf{p}) = i\,g\int d\vec{q}\,\gamma_5\psi_j(\vec{p}-\vec{q},\mathbf{p})\,\delta\lambda(\vec{q}),$$
$$\delta\bar{\psi}_j(\vec{p},\mathbf{p}) = i\,g\int d\vec{q}\,\bar{\psi}_j(\vec{p}-\vec{q},\mathbf{p})\gamma_5\,\delta\lambda(\vec{q}).$$

С точностью до дивергенции вариация лагранжиана (1) при таком преобразовании равна

$$\delta L(\varphi) = -2g\times \tag{9}$$
$$\times\sum_j\Big[im\bar{\psi}_j\gamma_5\psi_j + M^{-1}\mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s}(D_\alpha\psi_j)^+\gamma_0(D^\alpha\psi_j)\Big]\delta\lambda.$$

Первое слагаемое в правой части (9) приводит к нарушению киральной симметрии уже на классическом уровне и в данном случае интереса не представляет. Второе слагаемое может быть несколько упрощено. При $\mathcal{M}\to\infty$ вклад от слагаемых, пропорциональных $\mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s}t_aA_\alpha^a\psi_j$, исчезает. Поэтому можно сделать замену $D_\alpha\to\partial_\alpha$. Таким образом, практический интерес представляет часть вариации лагранжиана, имеющая вид

$$\delta\tilde{L}(\varphi) = -2g\,M^{-1}\sum_j\mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s}\partial_\alpha\bar{\psi}_j\partial^\alpha\psi_j\,\delta\lambda.$$

Согласно формуле (8) величина R, соответствующая $\delta\tilde{L}$, равна

$$\tilde{R} = -2gM^{-1}\mathcal{N}^{-1}\exp[\Delta^g(\varepsilon_g)]\lim_{\mathcal{M}\to\infty}\exp[\Delta^s(\varepsilon_s)]\times$$
$$\times\exp[iW_\Lambda(\varphi)]C(j,\varphi)\sum_j\mathcal{M}_j^{-1/\varepsilon_s}\times \tag{10}$$
$$\times\int d\vec{p}\int d\mathbf{p}\,\bar{\psi}(-\vec{p}-\vec{q},-\mathbf{p})\mathbf{p}^2\psi(\vec{p},\mathbf{p})\Big|_{\varphi=0}.$$

В правой части формулы (10) после действия оператора $\exp[\Delta^s(\varepsilon_s)]$ мы будем иметь выражение, которое соответствует произведению не связанных между собой спинорных циклов и незамкнутых спинорных треков. К каждому циклу прибавлен соответствующий контрчлен, сингулярный по ε_s.

Рассмотрим некоторый цикл. В этом случае интегрирования можно совершать в любом порядке и только самое последнее, замыкающее цикл, следует считать регуляризованным. Остальные интегрирования можно считать обычными. В последнем интегрировании сделаем замену переменных интегрирования $\mathbf{p}\to\mathcal{M}_j^{-1/(2\varepsilon_s)}\mathbf{p}$ и совершим предельный переход $\mathcal{M}\to\infty$. С учетом условий (4) эти действия приведут к таким последствиям. Во-первых, свертки спинорных полей (формула (3)) преобразуются следующим образом:

$$S_j(p+q)\to\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+\hat{q}+m+iM^{-1}\mathbf{p}^2\gamma_5}{m^2+M^{-2}\mathbf{p}^4-(\vec{p}+\vec{q})^2}.$$

Здесь p — циклический импульс, q — внешний для цикла импульс. Индекс j вместе с суммированием по нему можно опустить. Во-вторых, исчезнут все вершины, которые принадлежат циклу и к которым подходят линии, соответствующие теневым компонентам калибровочных полей. Единственными сингулярностями, которые могут остаться в циклах, будут полюсы по ε_s. Они компенсируются соответствующими контрчленами в $W_\Lambda(\varphi;\varepsilon_g,\varepsilon_s)$. Вместо того чтобы вводить эти контрчлены, можно заменить $\Delta^s(\varepsilon_s)$ на $\Delta_r^s(\varepsilon_s)$.

В результате таких манипуляций выражение (10) приобретет вид

$$\tilde{R} = \mathcal{N}^{-1}\exp[\Delta^g(\varepsilon_g)]\,V(\varepsilon_s),$$

где

$$V(\varepsilon_s) = \int d\mu_r(p;\varepsilon_s)\,\exp[\Delta_r^s(\varepsilon_s)]C(j,\varphi)\times$$
$$\times\exp[i\tilde{W}_\Lambda(\varphi;\varepsilon_g)]\bar{\psi}(-\vec{p}-\vec{q},-\mathbf{p})\mathbf{p}^2\psi(\vec{p},\mathbf{p})\Big|_{\varphi_s=0}. \tag{11}$$

Здесь $\tilde{W}_\Lambda(\varphi;\varepsilon_g)$ получается из $W_\Lambda(\varphi;\varepsilon_g,\varepsilon_s)$ после исключения всех контрчленов, сингулярных по ε_s, а также всех слагаемых с вершинами, соответствующими взаимодействию спинорных полей с теневыми компонентами калибровочных полей. Кроме того, следует оставить только физические спинорные поля, опустив вспомогательные.

Производящий функционал для перенормированных функций Грина (формула (5)) получается в результате предельных переходов (вначале $\varepsilon_s\to 0$, затем $\varepsilon_g\to 0$), поэтому для выявления возможных аномалий существенно не выражение $\tilde{R}$, а его соответствующий предел. Поэтому рассмотрим величину $V(0)=\lim_{\varepsilon_s\to 0}V(\varepsilon_s)$. Из этой величины можно выделить в виде сомножителя выражение, соответствующее циклу, для которого импульс p в формуле (11) является циклическим. Если в четырехмерном случае интеграл по этому циклу сходится, то операция $\lim_{\varepsilon\to 0}\int d\mu_r(p;\varepsilon)\ldots$ эквивалентна $\int d\vec{p}\int d\mathbf{p}\,\delta(\mathbf{p}^2)\ldots$ (см. статью [7]). Поэтому благодаря наличию в правой части формулы (11) множителя $\mathbf{p}^2$ соответствующий член вклада в $V(0)$ не даст. То же самое справедливо тогда, когда p является импульсом, распространяющимся по незамкнутому треку.

Операция $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int d\mu_r(p;\varepsilon)\mathbf{p}^2\ldots$ может дать конечный вклад и стать причиной возникновения аномалии тогда, когда упомянутый интеграл расходится. В рассматриваемой модели, в отличие от электродинамики, вклад в аномалии будут давать циклы не только с тремя звеньями, но также и с пятью. Только эти однопетлевые диаграммы дают вклад в аномалии. При последующем воздействии на $V(0)$ оператора $\exp[\Delta^g(\varepsilon_g)]$ могли бы возникнуть аномалии из-за вершин, описывающих взаимодействие спиноров с теневыми компонентами калибровочного поля. Именно такой член в лагранжиане (1) неинвариантен относительно киральных преобразований. Однако такие вершины после предельного перехода $\mathcal{M}\to\infty$ исчезают. Поэтому никакие новые аномалии возникнуть не могут. Это гарантирует нас от появления паразитных *spurious*-аномалий.

Таким образом, гибридная перенормировка, с одной стороны, в калибровочных моделях работает так же успешно, как схема минимальных вычитаний с использованием размерной регуляризации. С другой стороны, она, в отличие от размерной регуляризации, не имеет проблемы γ_5-матрицы, поскольку в гибридной перенормировке фигурируют только четырехкомпонентные спиноры. Поэтому предлагаемая перенормировка может успешно работать в киральных моделях.

Литература

1. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 2000. **122**. С. 399.
2. *Wess J., Zumino B.* // Phys. Lett. 1974. **B49**. P. 52.
3. *Wess J., Zumino B.* // Nucl. Phys. 1974. **B70**. P. 39.
4. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Commun. Math. Phys. 1975. **42**. P. 127.
5. *Ициксон К., Зюбер Ж.Б.* Квантовая теория поля. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984 (*Itzykson C., Zuber J.B.* Quantum Field Theory. N. Y.: McGraw-Hill, 1980).
6. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
7. *Ильин В.А., Имашев М.С., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1982. **52**. С. 177.

Поступила в редакцию
15.10.99