АСТРОНОМИЯ

УДК 530.12

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТОКОВОЙ ШТАНГОЙ ПО ПОЛЯРНОЙ ОРБИТЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ЗЕМЛИ

В. И. Денисов, В. Б. Пинчук

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Найдено точное решение нелинейных уравнений, описывающих движение космического аппарата под действием сил Ампера и сил гравитационного поля при частном законе управления элементом тока.

Работы по созданию электродинамических тросовых систем, одним из назначений которых является управление орбитальным движением космических аппаратов, получают все большее развитие [1]. Такие системы представляют собой гибкие линейные проводники с током, замыкание которого осуществляется через ионосферу с помощью специальных концевых плазменных устройств. В результате взаимодействия тока в проводнике с дипольным магнитным полем Земли возникает сила Ампера, которая является силой тяги для космического аппарата.

Однако, на наш взгляд, для указанной цели наиболее перспективно использование не гибких, а жестких проводников с током, например токовой штанги. В этом случае величиной и направлением силы Ампера легко управлять, изменяя силу тока и ориентацию штанги в пространстве по любому заданному закону.

Задача о движении космического аппарата в гравитационном поле Земли под действием силы Ампера чрезвычайно интересна в теоретическом плане, так как соответствующие уравнения движения не являются лагранжевыми [2]. Общие методы интегрирования, разработанные для систем таких уравнений [3], оказываются неприменимыми. Поэтому возникает задача исследования тех частных случаев, в которых эти уравнения имеют точные решения.

Рассмотрим векторное уравнение движения космического аппарата:

$$M_1\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1M_2\mathbf{r}}{r^3} + \frac{l}{c}[\mathbf{I}\times\mathbf{B}], \tag{1}$$

где G — постоянная тяготения, M_1 — масса космического аппарата, M_2 — масса Земли, l — длина токовой штанги, $\mathbf{I}$ — вектор тока в штанге, c — скорость света.

Магнитное поле Земли с большой точностью является дипольным, поэтому $\mathbf{B} = [3\mathbf{r}(\mathbf{m}\,\mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}]/r^5$, где $\mathbf{m}$ — вектор магнитного дипольного момента.

Как известно [3], задачи о движении в поле магнитного диполя чрезвычайно сложны. В частности, даже лагранжевы уравнения, описывающие движение заряженной частицы в поле магнитного диполя, до сих пор не удалось проинтегрировать в общем виде. Поэтому и в нашей более сложной задаче мы рассмотрим только полярные орбиты, в плоскости которых лежит магнитный дипольный момент Земли $\mathbf{m}$.

Предположим, что токовая штанга всегда перпендикулярна плоскости орбиты космического аппарата. В этом случае плоскость орбиты не будет вращаться и поворотом системы координат ее можно совместить с плоскостью XOY геоцентрической системы координат и направить ось X вдоль вектора магнитного дипольного момента.

Умножая уравнения (1) скалярно на вектор скорости $\mathbf{v}$, получим

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{M_1v^2}{2} - \frac{GM_1M_2}{r}\Big) = \frac{lmI(\varphi)}{cr^3}(2r\dot{\varphi}\cos\ \varphi - \dot{r}\sin\ \varphi), \tag{2}$$

где φ — полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси X. Уравнение моментов можно найти, если уравнение (1) умножить векторно на $\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt}\Big(M_1r^2\dot{\varphi}\Big) = \frac{2lmI(\varphi)}{cr^2}\cos\ \varphi. \tag{3}$$

Из этого уравнения следует, что в рассматриваемой нами задаче ни энергия космического аппарата, ни его момент импульса не сохраняются. Однако мы можем найти точное решение уравнения (3), если подберем способ управления током $I = I(\varphi)$, позволяющий получить из выражения (2) не закон сохранения, а первый интеграл.

Правая часть выражения (3) будет представлять собой субстанциальную производную по времени [3] только при $I(\varphi) = I_0\sin^3\varphi$. Тогда из уравнения (2) будем иметь

$$\frac{M_1v^2}{2} - \frac{GM_1M_2}{r} - \frac{lmI_0}{cr^2}\sin^3\varphi = M_1E_0, \tag{4}$$

где E_0 — константа интегрирования.

Уравнение моментов в этом случае дает еще один первый интеграл:

$$r^4\dot{\varphi}^2 = L_0 + \frac{lmI_0}{M_1c}\sin^4\varphi, \tag{5}$$

где L_0 — константа интегрирования.

Комбинируя уравнения (4) и (5), получим

$$\dot{r}^2 + \frac{L_0}{r^2} - \frac{2GM_2}{r} - 2E_0 = 0.$$

Отсюда легко найти закон движения космического аппарата в форме зависимости времени движения t от радиуса r:

$$t = t_0 + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r dr}{\sqrt{2E_0 r^2 - L_0 + 2GM_2 r}}.$$

Уравнение траектории можно получить, если из выражений (4) и (5) построить аналог первой формулы Бине. Для этого введем обозначения: $u = 1/r$, $\eta(\varphi) = u - GM_2/L_0$ и $C_0 = -G^2M_2^2/L_0^2 - 2E_0/L_0$, после чего будем иметь

$$[L_0 + \frac{lmI_0}{cM_1}\sin^4\varphi]\eta'^2 + L_0[\eta^2 + C_0] = 0, \qquad (6)$$

где штрих обозначает производную по φ.

Поскольку константы E_0 и L_0 определяются начальными условиями, то постоянная C_0 является знаконеопределенной величиной. При этом возможны три различных решения этого уравнения.

При $C_0 < 0$ решение имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \sqrt{|C_0|}\cos\left\{\alpha_0 \pm \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \dfrac{lmI_0}{cM_1L_0}\sin^4\varphi}}\right\},$$

где $\alpha_0 = \arccos\,[(1/r_0 - GM_2/L_0)/\sqrt{|C_0|}]$.

При $C_0 = 0$ вещественное решение уравнения (6) возможно только при $|mlI_0\sin^4\varphi/(cM_1L_0)| > 1$:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \eta_0 \exp\left\{\pm \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left|\dfrac{lmI_0}{cM_1L_0}\right|\sin^4\varphi - 1}}\right\},$$

где $\eta_0 = 1/r_0 - GM_2/L_0$.

И, наконец, при $C_0 > 0$ и $|mlI_0\sin^4\varphi/(cM_1L_0)| > 1$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM_2}{L_0} + \sqrt{|C_0|}\,\mathrm{sh}\left\{\alpha_0 \pm \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left|\dfrac{lmI_0}{cM_1L_0}\right|\sin^4\varphi - 1}}\right\},$$

где $\alpha_0 = \mathrm{arsh}\,[(1/r_0 - GM_2/L_0)/\sqrt{C_0}]$.

Таким образом, действие силы Ампера на космический аппарат, в конструкцию которого включена жесткая штанга с током, существенно изменяет вид полярной траектории в гравитационном поле Земли, что может найти применение в проектировании космических полетов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 98-02-17448а).

Литература

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990; *Денисов В.И., Денисова И.П., Пинчук В.Б.* Препринт НИИЯФ № 2000-8/612. М., 2000.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. *Петкевич В.В.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
10.11.99