УДК 539.12.01

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Найдены явные решения уравнений движения для одного класса полностью интегрируемых систем четырех частиц во внешнем поле. Получено соотношение, связывающее начальные условия, константу взаимодействия и время падения двух частиц в сингулярность потенциала взаимодействия.

К настоящему времени различные методы решения уравнений движения в явном виде были найдены для многих полностью интегрируемых систем [1–4]. В работе [5] мы использовали разработанный ранее [6] метод решения уравнений движения в явном виде для класса полностью интегрируемых систем N частиц с равными массами $m=1$, расположенных на прямой и попарно взаимодействующих во внешнем поле. С помощью этого метода мы нашли явные решения уравнений движения для класса систем трех частиц. В настоящей работе этот метод применяется для системы четырех частиц. На основе найденных решений получены оценки времени падения частиц на центр для различных начальных условий.

Системы рассматриваемого класса обладают парой Лакса и как следствие N-интегралами движения, которые являются полиномами по степеням импульсов и координат взаимодействующих частиц. Один из этих интегралов движения представляет собой гамильтониан системы:

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2}+W(x_i)\right)+\sum_{i>j}^{N}V(x_i-x_j). \qquad (1)$$

Для того чтобы система обладала свойством полной интегрируемости, потенциалы внешнего поля $W(x)$ и парного взаимодействия $V(x)$ должны иметь следующий вид:

$$V(x)=\frac{a}{x^2},\quad W(x)=\gamma_1x^4+\gamma_2x^2+\gamma_3x, \qquad (2)$$

где $a,\gamma_i,\ i=1,2,3,$ — произвольные константы.

В работе [6] уравнения движения системы N частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) сведены к неоднородному уравнению Бюргерса–Хопфа. С помощью этой процедуры были найдены решения уравнений движения для системы (1)–(2). При выполнении следующих условий:

$$a=-A^2,\quad \gamma_1=-\frac{\alpha^2}{2},\quad \gamma_2=-\alpha\beta,\quad \gamma_3=-\alpha A(N-1), \qquad (3)$$

где A,α,β — произвольные константы, координаты N частиц являются нулями функции

$$\phi(x,t)=\sum_{k=0}^{N}x^k[\exp(t\hat{T})\mathbf{c}(0)]_k, \qquad (4)$$

где

$$\hat{T}_{00}=-\beta,\quad \hat{T}_{02}=-a,$$

$$\hat{T}_{N-1N}=-N\beta,\quad \hat{T}_{N-1N-2}=2\alpha,\quad \hat{T}_{NN-1}=\alpha,$$

$$\hat{T}_{kk-1}=(N+1-k)\alpha,\quad \hat{T}_{kk+1}=-(k+1)\beta,$$

$$\hat{T}_{kk+2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}a,\quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \qquad (5)$$

$$c_{N-k}(0)=(-1)^k\sum_{1\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_k\leqslant N}x_{\lambda_1}(0)\ldots x_{\lambda_k}(0),$$

$$c_N(0)=1.$$

Остальные элементы матрицы $\hat{T}$ равны нулю. В этих выражениях $x_i(0)$, $i=1,\ldots,N,$ — начальные координаты N частиц.

Применим разработанный метод [6] для нахождения явных решений уравнений движения для следующего класса полностью интегрируемых систем частиц во внешнем поле. Рассмотрим системы частиц вида (1) с потенциалами (2) при ограничениях (3). Наложим дополнительные условия:

$$\beta=0,\quad \alpha=-A^2. \qquad (6)$$

Таким образом, имеется только один параметр в потенциалах $V(x), W(x)$. Получим и проанализируем явные решения уравнений движения для четырех частиц с гамильтонианом (1) и потенциалами (2) при ограничениях (3) и (6).

Для $N=4$ из (4)–(5) получаем $\hat{T}^5=18a^3\hat{T}^2$, где E — единичная матрица. В этом случае ряд в (4) можно просуммировать, и координаты четырех частиц даются четырьмя действительными решениями уравнения

$$\phi(x,t)=0. \qquad (7)$$

При этом уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{2}x^kS_k(\theta)\bar{T}^k\mathbf{c}(0)]_k=0,$$

где $a\bar{T} = \hat{T}$, $\theta = -at(2)^{1/3}$,

$$S_0(\theta) = 1, \quad S_1(\theta) = \frac{\theta}{18^{1/3}},$$

$$S_2(\theta) = \frac{1}{54}(\mathrm{e}^{\theta} - 2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta - \frac{\pi}{3})),$$

$$S_3(\theta) = \frac{1}{54}(\mathrm{e}^{\theta} + 2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta) - 3), \qquad (8)$$

$$S_4(\theta) = \frac{1}{54 \cdot 18^{1/3}}(\mathrm{e}^{\theta} - 2\,\mathrm{e}^{-\theta/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta + \frac{\pi}{3}) - 3\theta).$$

Таким образом, координаты четырех частиц в любой момент времени определяются действительными решениями уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} R_k x^k = 0. \qquad (9)$$

Для начальных условий вида $x_1(0) = -2x_0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = x_0$, $x_4(0) = 2x_0$ коэффициенты в (9) имеют вид

$$R_0 = 24x_0^3 S_3 - 8x_0^2 S_2 - x_0(S_1 + 30S_4) + (1 + 12S_3),$$

$$R_1 = 24x_0^3 S_2 - 8x_0^2(S_1 + 18S_4) - x_0(1 + 30S_3) + 12S_2,$$

$$R_2 = 4x_0^3(3S_1 + 54S_4) - 4x_0^2(1 + 18S_3) - 15x_0 S_2 + (6S_1 + 108S_4),$$

$$R_3 = 4x_0^3(1 + 6S_3) - 8x_0^2 S_2 - 3x_0(S_1 + 10S_4) + 12S_3,$$

$$R_4 = -12x_0^3 S_2 + 4x_0^2(S_1 + 18S_4) + 15x_0 S_3 - 6S_2.$$

При $t \to \infty$ асимптотическая форма (9) есть

$$x^4 + 18^{1/3}x^3 + \frac{3}{2}12^{1/3}x^2 + x - \frac{1}{2}18^{1/3} = 0.$$

Это уравнение имеет только два действительных решения. Отсюда следует, что частицы падают в сингулярность за конечное время t_0 при любых значениях x_0. При произвольных $x_i(0)$, приводя уравнение (9) к виду $x^4 + ux^2 + qx + r = 0$ и пользуясь выражением для дискриминанта в общем случае [7]: $D = 16u^4 r - 4u^3 q^2 - 128u^2 q^2 + 144uq^2 r - 27q^2 + 256r^3$, получаем оценку сверху для t_0:

$$t_0 = \frac{18^{1/3}}{4A^2}\,\frac{\sum\limits_{\substack{k,l=1\\(k<l)}}^{4} x_k^2(0)x_l^2(0)}{\sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2(0)}. \qquad (10)$$

Из выражения (10) следует, что при уменьшении константы связи A^2 время падения в сингулярность увеличивается.

При $N > 4$ получить аналогичные оценки пока не удалось. При $N = 5$ из (4)–(5) получаем

$$\hat{R}^6 = \hat{R}^3 + kE,$$

где $\hat{R} = \frac{1}{2\cdot 9^{1/3}}\hat{T}$ и $k = (5/2)^2 3^{-4}$. При этом имеем:

$$S_0(\theta) = 1 + \frac{k\theta^6}{6!} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_l\theta^{9+3l}}{(9+3l)!},$$

где

$$a_l = k\sum_{m=0}^{l-3}\frac{(l+m)!}{(l-1)!m!}k^m.$$

Суммирование рядов в (4) в этом случае, вероятно, приведет к θ-функциям.

Полученные явные решения уравнений движения могут быть использованы для проверки различных приближенных методов, а также в качестве нулевого приближения при исследовании близких к рассмотренным неинтегрируемых систем частиц.

Авторы выражают сердечную благодарность В. И. Иноземцеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. 1975. **13**. P. 507; *Moser J.* // Adv. Math. 1975. **16**. P. 197.
2. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. 1993. **A20**. P. 753.
3. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Rep. 1983. **94**. P. 312.
4. *Grosse H.* // Acta Phys. Austr. 1980. **52**. P. 101.
5. *Мещеряков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
6. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Lett. 1984. **A106**. P. 101.
7. *Feferman S.* // The Number Systems. Foundation of Algebra and Analysis. Reading: Addison–Wesley, 1964.

Поступила в редакцию
10.01.00