

Заметим, что

$$\Theta S_{\{n\}} + E_{\{n\}} = \frac{(\Phi_{\{p\sigma\}M}, (\Theta \bar{S} + \bar{E}) \Phi_{\{p\sigma\}M})}{(\Phi_{\{p\sigma\}M}, \Phi_{\{p\sigma\}M})} \quad (22)$$

и поэтому является оценкой сверху для минимального квантового значения свободной энергии системы фермионов. Естественно, наилучшей оценкой такого рода является минимум выражения $\Theta S_{\{n\}} + E_{\{n\}}$ по всем наборам $\{n\}$. Продемонстрируем нахождение этого минимума теперь на примере бесспиновых бозонов с гамильтонианом (3) для случая $k = 1$. Пуантилистическая регуляризация для бозонов производится так же, как и в фермионном случае, и оценка сверху для минимального квантового значения энтропии в этом случае имеет вид

$$F_{\{n\}} = \sum_p \varepsilon_p \tilde{n}_p + \frac{U_0 a^3}{2L^3} \sum_{pq} (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-q)) \tilde{n}_p \tilde{n}_q - \delta_{p0} \frac{U_0 a^3}{2L^3} \tilde{n}_0^2 + \Theta (\tilde{n}_p \ln \tilde{n}_p - (1 + \tilde{n}_p) \ln(1 + \tilde{n}_p)), \quad (23)$$

где $\tilde{v}(p) = \int dx v(x) \exp(ipx)$, $\varepsilon_p = \hbar^2 p^2 / 2ma^2$, \tilde{n}_p — пуантилистические числа заполнения, связанные с обычными числами заполнения n_p соотношением типа (20). Минимум выражения (23) по \tilde{n}_p определяется

решением системы уравнений

$$\varepsilon_p + \frac{U_0 a^3 n_0}{L^3} \sum_{p'} (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p-p')) \tilde{n}_{p'} + \Theta \ln \left(\frac{\tilde{n}_p}{1 + \tilde{n}_p} \right) - \mu - \delta_{p0} \left(\frac{U_0 a^3 \tilde{n}_0}{L^3} \tilde{v}(0) + \Theta \ln \left(\frac{\tilde{n}_0}{1 + \tilde{n}_0} \right) \right) = 0, \quad (24)$$

$$N = \sum_p \tilde{n}_p.$$

Если при температуре Θ решение системы (24) таково, что $\tilde{n}_0 \sim N$, то в бозонной системе при этой температуре существует конденсат.

Литература

1. Маслов В.П. // ТМФ. 2000. 125, № 3. С. 453.
2. Маслов В.П. // Функц. анализ и его приложения. 1999. 33, № 4. С. 50.
3. Маслов В.П. // Функц. анализ и его приложения. 2000. 34, № 4. С. 35.
4. Маслов В.П. // ТМФ. 1999. 121, № 3. С. 492.
5. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
6. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
13.10.00

УДК 539.12.01

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ N ЧАСТИЦ В ПОТЕНЦИАЛЕ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассмотрена задача нахождения волновых функций возбужденных состояний дискретного спектра квантовых систем, обладающих в классическом пределе дополнительными интегралами движения. Для некоторого интервала значений параметров потенциалов взаимодействия получены рекуррентные соотношения, определяющие волновые функции с точностью до нормировочного множителя.

Нахождение явных решений классических и квантовых систем, обладающих свойством полной интегрируемости, по-прежнему вызывает интерес [1–5].

К настоящему времени известно значительное число квантовых систем с N степенями свободы, обладающих дополнительными интегралами движения [3–5]. Однако лишь в ограниченном числе случаев с их помощью удастся упростить задачу об определении спектра и собственных функций соответствующих гамильтонианов.

В работе [6] был предложен способ нахождения энергетических уровней и волновых функций дискретного спектра, не использующий явного вида дополнительных сохраняющихся величин. В работе [7] этим способом были исследованы состояния дискретного спектра квантовых систем с гамильтонианами

вида

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i) \right) + \alpha(\alpha + 1) \sum_{i>j}^N [V(x_i - x_j) + V(x_i + x_j)], \quad (1)$$

потенциалом парного взаимодействия

$$V(x) = \frac{1}{\text{sh}^2 x}$$

и потенциалом внешнего поля

$$W(x) = \frac{\mu(\mu - 1)}{2} \frac{1}{\text{sh}^2 x} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

Предложенная в работе [6] замена переменных $t_j = (\text{ch } x_j)^{-2}$, $j = 1, \dots, N$, позволяет понизить порядок сингулярностей в уравнении Шрёдингера $H\psi = E\psi$. Переход к симметричным относительно перестановок по t_j переменным

$$a_1 = \prod_{j=1}^N t_j, \quad a_l = \frac{\hat{D}^{l-1}}{(l-1)!} a_1, \quad \hat{D} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad l = 1, \dots, N$$

позволяет записать исходное уравнение Шрёдингера в виде, удобном для нахождения уровней энергии и волновых функций:

$$[H_1(\beta) + H_2(\beta)]\varkappa = [E - \epsilon(\beta)]\varkappa,$$

где

$$H_1(\beta) = 2 \sum_{l,m=1}^N \left\{ \sum_{\tau=1}^{l-1} \sum_{\nu=0}^1 [(l+m-2\tau) - \nu] a_\tau a_{l+m-\tau-\nu} - (N-m+2) a_{m-1} a_l - (N-l+2) a_m a_{l-1} - (N+m+1) a_l a_m \right\} \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial a_m} -$$

$$- \sum_{l=1}^N \left\{ a_{l-1} (N-l+2) [4\beta + 2\mu + 3 + 2\alpha(N+l-3)] + 2a_l (n-l+1) [2\beta + 1 + \alpha(N+l-2)] \right\} \frac{\partial}{\partial a_l},$$

$$H_2(\beta) = a_N \left\{ 2 \sum_{l,m=1}^N a_l a_m \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial a_m} + \sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial}{\partial a_l} [4\beta + 2\mu + 3 + 4\alpha(N-1) + p(\beta)] \right\}. \quad (3)$$

Параметр β и величины $\epsilon(\beta), p(\beta)$ определяются из условия нормировки. Волновые функции представляют собой полиномы по симметричным переменным a_j :

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \varkappa(a_1, \dots, a_N) \prod_{j=1}^N z_j^\mu (1 - z_j^2)^\beta \prod_{j>k} (z_j^2 - z_k^2),$$

где $z_j = \text{th } x_j$ и

$$\varkappa(a_1, \dots, a_N) = \sum_{p=0}^n \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_N \leq N} c_{j_1, \dots, j_N} a_1^{j_1} \dots a_N^{j_N}. \quad (4)$$

Уровни энергии определяются набором N целых чисел j_1, \dots, j_N , $0 \leq j_1, \dots, j_N \leq n$, $j_1 + \dots + j_N = p \leq n$, где n — максимальная степень полинома \varkappa . Из условия нормировки волновой функции следует, что число n ограничено сверху:

$$n < \frac{\lambda - \mu}{2} - \alpha(N - 1).$$

Энергетический спектр имеет вид

$$-E_{j_1, \dots, j_N} = -\epsilon(\beta) - 4 \sum_{l>m}^N l j_l j_m + 2(N+1)p(\beta) \times [p(\beta) + \lambda - \mu - 2n - \alpha N] + 2 \sum_{l=1}^N l j_l [\alpha(2N+1) + 2n + \mu - \lambda - j_l - \alpha l]. \quad (5)$$

В работе [7] удалось найти волновые функции лишь в простейшем случае $n = 1$. В настоящей работе мы рассмотрим волновые функции возбужденных уровней с $n = 2$.

Выражение (2) представляет собой обобщенный потенциал Пешля–Теллера. Потребовав, чтобы волновые функции, согласно (4), имели вид

$$\varkappa(a_1, \dots, a_N) = \sum_{l=0}^N c_l a_l + c_{N+1} + \sum_{l \leq k} b_{lk} a_l a_k, \quad (6)$$

с учетом условия нормировки получаем

$$\beta = \frac{\lambda - \mu}{2} - \alpha(N - 1) - 2, \quad p(\beta) = 1 - 2\lambda, \quad (7)$$

$$\epsilon(\beta) = -\frac{N}{2} \left[\frac{\alpha^2}{3} (N^2 - 1) + (\lambda - \mu - \alpha(N - 1) - 4)^2 \right].$$

Подставляя (5), (6) и (7) в (3), получаем систему $N(N+1)/2$ однородных линейных алгебраических уравнений с равным нулю определителем. В отличие от случая $n = 1$ в уравнениях системы присутствует вклад от первого слагаемого в $H_1(\beta)$ со вторыми производными по a_j . Это приводит к тому, что коэффициенты c_l, b_{lk} зависят от всех ненулевых коэффициентов $c_m, m > l, b_{mn}, m > l, n > k$. Действуя по индукции, можно получить рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты в выражении (6). В результате в зависимости от значений квантовых чисел j_1, \dots, j_N получаем три неэквивалентных набора рекуррентных соотношений.

1. В первом случае $j_l = 2\delta_{ls}, s = 1, \dots, N, p = 2; s' = 2s - N - 1, n' = 2s - j, K = (N - s + 1)(\lambda - \mu - 2 - \alpha(N - s)); b_{ss} = d_s$, где d_s — произвольная константа, поскольку нашим способом волновые функции определяются с точностью до нормировки, и

$$b_{jl} = 0, \quad j + l > 2s; \quad c_j = 0, \quad j > s'; \quad b_{jn'} = \frac{4(n' - j)}{F_{j00}} \sum_{\sigma=j+1}^s b_{\sigma n' - \sigma + j}, \quad (8)$$

где величины F_{jkl} определены ниже.

2. Во втором случае $j_l = \delta_{ls} + \delta_{lN}$, $s = 1, \dots, N-1$, $p = 2$; $s' = s - 1$, $n' = N$, $K = \mu - \lambda + 1$; $b_{sN} = d_s$, где d_s — произвольная константа, и

$$b_{jl} = 0, \quad j + l > s + N; \quad c_j = 0, \quad j > s'.$$

Остальные соотношения имеют вид

$$b_{sN} = \frac{1 - 2\lambda}{Q_s} d_s,$$

$$b_{s-mN} = \frac{1}{Q_{s-m}} \left\{ -2 \left[(N - s + m + 1) (2\lambda - 3 - 2\alpha(N - s + m)) + 1 \right] b_{s-m+1N} + 4(N - s + m) \sum_{k=1}^m \sum_{\tau=0}^1 b_{s-m+kN-k+\tau} + (1 - 2\lambda) c_{s-m} \right\}, \quad m = 1, \dots, s - 1.$$

В последнем соотношении суммирование проводится при условии $2k \leq N - s + m + \tau$.

Отметим, что условие самосопряженности гамильтониана (1) приводит к неравенству $(2\lambda - 1) > 10 + 4\alpha(N - 1)$, т.е. коэффициенты c_j и b_{jk} не могут быть независимыми.

3. В третьем случае $j_l = \delta_{ls} + \delta_{lN-m}$, $s = 1, \dots, N-2$, $m = 1, \dots, N-s+1$, $b_{sN-m} = d_{sN-m}$; $s' = s - m - 1$, $n' = N + s - m - j$, где d_{sN-m} — произвольная константа, и

$$b_{jl} = 0, \quad j + l > s'; \quad c_j = 0, \quad j + l > N + s - m.$$

Коэффициенты $b_{jn'}$ определяются из выражения (8). Введем следующие обозначения:

$$R_{jkl} = 2^l \prod_{\tau=1}^l \{ (s - j + k - \tau) [\lambda - \mu - 3 - \alpha(2N - s - j + k - \tau)] - K \},$$

$$F_{jkl} = 2^{k-l} \prod_{\tau=0}^{k-l} \{ (s - j) [\lambda - \mu - 3 - \alpha(2N - s - j + 1)] + (N - n' + k - \tau + 1) [\lambda - \mu - 1 - \alpha(N - n' + k - \tau)] - K \},$$

$$S_j = R_{j11} + N - j + 1,$$

$$Q_j = R_{j11} + 2(N - s + 1) [\lambda - \mu - 3 - \alpha(N - 3)] + 2(2\lambda - 2\mu - 7).$$

Рекуррентные соотношения, общие для всех трех случаев, записываются с помощью введенных вели-

чин следующим образом:

$$c_{s'-k+1} = \frac{(N - s' + k)!}{\Gamma[(2\lambda - 5)/(2\alpha) - N + s' - k]} \times \left[(-2\alpha)^k \frac{\Gamma[(2\lambda - 5)/(2\alpha) - N + s']}{(N - s')! R_{s'kk}} c_{s'+1} + 4 \sum_{l=1}^k (-2\alpha)^{l-1} \frac{\Gamma[(2\lambda - 5)/(2\alpha) - N + s' - k + l - 1]}{(N - s' + k - l)! R_{s'kl}} \times \sum_{\sigma=1}^{s-s'+k-\tau-l} \sum_{\tau=0}^1 b_{s'-k+l+\sigma+\tau N-\sigma+1} (1 - \delta_{\tau 1} \delta_{lk}) \right], \quad k = 1, \dots, s'$$

(в этом выражении суммирование проводится при выполнении условия $2\sigma \leq N + 1 + k - s' - l - \tau$);

$$b_{jn'-k} = (-4\alpha)^k \frac{(N - n' + k + 1)!}{\Gamma[(\lambda - 2)/\alpha - N + n' - k]} \times \left\{ \frac{\Gamma[(\lambda - 2)/\alpha - N + n']}{(N - n' + 1)! F_{jk1}} b_{jn'} - 2 \sum_{l=1}^k (n' - l - j) \sum_{\sigma=j+1}^s \sum_{\tau=0}^1 (-4\alpha)^k \times \frac{\Gamma[(\lambda - 2)/\alpha - N + n' - l]}{(N - n' + l + 1)! F_{jkl}} \times \left[2(N - j + 1) [\lambda - 2 - \alpha(N - 1)] + n' - l + j \right] b_{j+1n'-l} - 2(n' - l - j) \sum_{\sigma=j+1}^s \sum_{\tau=0}^1 b_{\sigma n' - l - \sigma + \tau + j} (1 - \delta_{\tau 1} \delta_{\sigma j + 1}) \right\}, \quad k = 1, \dots, n' - j + 1$$

(в этом выражении суммирование проводится при выполнении условия $2\sigma \leq n' - l + 1 + \tau + j$);

$$b_{jj} = \frac{2(N - j + 1) [2\lambda - 3 - 2\alpha(N - j)]}{S_j} b_{jj+1}.$$

Приведенные рекуррентные соотношения определяют коэффициенты c_j и b_{jk} для произвольного N , а тем самым в силу (6) и волновые функции с точностью до нормировочного множителя. При выполнении условия $0 < \lambda - \mu - 2\alpha(N - 1) < 6$ найденные здесь волновые функции и волновые функции для случая $n = 1$, вычисленные в работе [7], представляют собой весь дискретный спектр рассматриваемых систем.

В заключение отметим, что волновые функции дискретного спектра рассмотренных систем в более широких интервалах значений констант λ , μ и α , допускающих $n \geq 3$, могут быть найдены аналогичным способом.

Полученные результаты могут быть использованы для проверки различных приближенных методов решения многочастичных квантовых задач, а также при исследовании систем, близких к интегрируемым.

Литература

1. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
2. *Меццераков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
3. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1971. **12**, No. 3. P. 419.
4. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1971. **A4**, No. 5. P. 2019.

5. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
6. *Иноземцев В.И., Меццераков Д.В.* // Кр. сообщ. ОИЯИ. 1984. № 4–84. С. 22.
7. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Scripta. 1986. **33**, No. 1. P. 99.

Поступила в редакцию
10.01.00

УДК 514.763.85; 514.763.24

**КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ**

А. В. Киселев

(кафедра математики)

Определены производящие сечения законов сохранения для эллиптического уравнения Лиувилля. Показано, что каждому производящему сечению соответствует нетривиальный закон сохранения; установлено, что все классические законы сохранения порождаются симметриями лагранжиана. Приведены явные формулы, сопоставляющие каждому производящему сечению некоторый закон сохранения.

Двумерное эллиптическое уравнение Лиувилля

$$\mathcal{E} = \{F \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2} - \exp(2u) = 0\} \quad (1)$$

возникает во многих разделах математики и математической физики. В римановой геометрии оно представляет собой уравнение Гаусса, записанное в конформных координатах для плоскости Лобачевского [1]. Кроме того, уравнение (1) применяется при исследовании автомодельных решений уравнений Кадомцева–Погуде [2].

Рассмотренный в настоящей работе подход связан с решением определяющих уравнений на производящие сечения законов сохранения [3] и реализацией метода восстановления сохраняющихся токов по производящим сечениям [4].

1. Производящие сечения

Известно [3], что производящие сечения ψ (в случае единственной зависимой переменной $u(x^1, x^2)$) — производящие функции законов сохранения принадлежат ядру $\ker(\ell_F^{\mathcal{E}})^*$ оператора, формально сопряженного оператору универсальной линеаризации, ограниченному на уравнение \mathcal{E} :

$$\ell_F = \sum_{\sigma} \frac{\partial F}{\partial p_{\sigma}} D_{\sigma}, \quad (2)$$

где $p_{\sigma} = \partial^{|\sigma|} u / \partial x^{\sigma}$, σ — мультииндекс, x^{σ} пробегает все наборы независимых переменных x^1 и x^2 , $D_i = \partial / \partial x^i + \sum_{\sigma} p_{\sigma+i} \partial / \partial p_{\sigma}$ — полная производная по i -й координате. Для уравнения (1) определяющее уравнение на производящие функции имеет вид

$$D_1^2 \psi + D_2^2 \psi - 2 \exp(2u) \psi = 0. \quad (3)$$

Производящие функции классических законов сохранения суть функции независимых координат x^1 и x^2 , переменной u и ее первых производных $p_1 \equiv p_{(1,0)}$, $p_2 \equiv p_{(0,1)}$: $\psi = \psi(x^1, x^2, u, p_1, p_2)$. В этом случае решения уравнения (3) имеют вид

$$\psi = A(x^1, x^2) p_1 + B(x^1, x^2) p_2 + C(x^1, x^2), \quad (4)$$

причем функции A и B удовлетворяют соотношениям Коши–Римана, а C определяется из этих соотношений:

$$C = \frac{\partial A}{\partial x^1} = \frac{\partial B}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x^1} = 0, \quad (5)$$

т. е. $A = \text{Re}(\zeta)$, $B = \text{Im}(\zeta)$ являются соответственно вещественной и мнимой частями голоморфной в \mathbb{C} функции $\zeta(x^1 + ix^2)$.

2. Законы сохранения

О п р е д е л е н и е. Сохраняющимся называется ток $(S_1, S_2) = -S_2 dx^1 + S_1 dx^2$, дивергенция которого равна нулю на уравнении $\mathcal{E} = \{F = 0\}$: $D_1(S_1) + D_2(S_2) = \Delta(F)$, $\Delta = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D_{\sigma}$. Производящая функция ψ закона сохранения η имеет в этом случае вид $\Delta^*(1)$ [3, 5].

Заранее не известно, каждому ли элементу ядра $\ker(\ell_F^{\mathcal{E}})^*$ соответствует нетривиальный закон сохранения или же существуют посторонние решения определяющих уравнений. Процедура исключения таких решений состоит в следующем.

Пусть $\psi \in \ker(\ell_F^{\mathcal{E}})^*$, т. е. существует такой \mathcal{C} -дифференциальный оператор Δ (оператор вида $\sum_{\sigma} a_{\sigma} D_{\sigma}$), что

$$\ell_F^*(\psi) = \Delta(F). \quad (6)$$