

параметризованы голоморфными в \mathbb{C} функциями; при этом существенно то, что уравнение (1) лагранжево: все классические законы сохранения происходят из симметрий лагранжиана.

В настоящее время остается открытым вопрос об описании всех высших законов сохранения для уравнения (1), т.е. таких, что соответствующие им производящие сечения зависят от производных выше второго порядка функции $u(x^1, x^2)$ (установлено, что симметрии и законы сохранения второго порядка отсутствуют).

Автор благодарит А. В. Овчинникова за постановку задачи, а также А. М. Вербовецкого и И. С. Красильщика за ценные замечания и конструктивную критику.

УДК 537.874

ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ В СЛОЕ НА ПОДЛОЖКЕ

Е. Ю. Еремина, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Построена математическая модель рассеяния поляризованного излучения неосесимметричной структурой, расположенной под пленкой на проницаемой подложке. Приведены результаты для рассеяния частицами различной формы.

По мере совершенствования объемных интегральных схем становится все более актуальной проблема обеспечения чистоты кремниевых вейферов, используемых как основа современных интегральных схем. Дальнейшая миниатюризация схем микропроцессоров требует ужесточения стандартов отклонения их конфигураций от заданной структуры, в частности чистоты поверхности кремниевого вейфера на различных стадиях технологического процесса. Обнаружение загрязняющих частиц на вейфере осуществляется с помощью оптических поверхностных сканеров. Совершенствование конструкций сканеров представляет собой приоритетную задачу для силиконовой промышленности [1]. Разработка математических моделей анализа процессов рассеяния помогает решить эту задачу.

Большое количество работ было посвящено анализу рассеивающих свойств загрязняющих частиц различных материалов на основе метода дискретных источников (МДИ). В работе [2] проводился анализ рассеяния света частицами и ямами на кремниевой подложке. В работе [3] МДИ обобщен на случай осесимметричной частицы в слое. Однако вопрос о влиянии деформаций, ведущих к неосесимметричным структурам, на рассеивающие свойства микрочастиц практически не рассматривался. В настоящей работе МДИ обобщается на случай произвольной проницаемой частицы, расположенной в слое на поверхности подложки, когда частица с подложкой уже не образуют осесимметричной структуры. На основе про-

Литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Т. I. М.: Наука, 1979.
2. Gusyatkina V.N., Samokhin A.V., Titov V.S. et al. // Acta Appl. Math. 1989. **15**, No. 1. P. 24.
3. Бочаров А.В., Виноградов А.М., Красильщик И.С. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.
4. Vinogradov A. M. // J. Math. Anal. Appl. 1984. **100**, No. 1. P. 1.
5. Krasil'shchik J., Verbovetsky A. Homological Methods in Equations of Mathematical Physics, Opava. Czech Republic: Open Education & Science, 1998.

Поступила в редакцию
17.03.00

граммной реализации развитого метода проводится анализ рассеивающих свойств эквиобъемных частиц с различными геометриями.

1. Математическая модель неосесимметричного рассеивателя

Начнем с математической постановки рассматриваемой задачи. Пусть $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ — поле плоской электромагнитной волны линейной поляризации, падающей под углом θ_0 относительно нормали на плоскую границу Ξ_f раздела воздух-слой $D_0 - D_f$, а частица, занимающая область D_i с гладкой границей ∂D , расположена целиком внутри слоя толщины d , ограниченного плоскостями Ξ_f и Ξ_1 . Плоскость Ξ_1 разделяет слой и подложку D_1 . Введем прямоугольную систему координат, выбрав ее начало на плоскости Ξ_1 , а ось Oz направим вдоль нормали к подложке в область D_f . Тогда граничная задача рассеяния принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_t = ik\varepsilon_t \mathbf{E}_t; \operatorname{rot} \mathbf{E}_t = -ik\mu_t \mathbf{H}_t \text{ в } D_t, \quad t = 0, f, 1, i,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_f(p)) &= 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_f(p)) &= 0, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_f(p) - \mathbf{E}_{0,1}(p)) &= 0, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_f(p) - \mathbf{H}_{0,1}(p)) &= 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} p \in \partial D, \\ \\ p \in \Xi_{f,1} \end{aligned} \quad (1)$$

с условиями излучения (затухания) для рассеянных полей на бесконечности. Здесь $\{\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t\}$ — полное

поле в соответствующей области D_t , $k = \omega/c$, а \mathbf{n}_p — нормаль к поверхности ∂D . При этом поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ в D_0 включает в себя как падающую плоскую волну $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$, так и отраженное и рассеянное поля. Полагаем, что поверхность частицы является гладкой, $\partial D \in C^{(1,\alpha)}$, а параметры сред удовлетворяют условиям $\text{Im } \varepsilon_t, \mu_t \leq 0$. Тогда граничная задача (1) имеет единственное решение.

Прежде чем строить приближенное решение для рассеянных полей, решим задачу дифракции поля плоской волны $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ на слоистой структуре воздух–слой–подложка. Как хорошо известно [4], это решение выписывается в явном виде. Будем обозначать полученное поле $\{\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0\}$, $t = 0, f, 1$.

Перейдем теперь к построению приближенного решения исходной задачи (1), обозначив рассеянное в D_t , $t = 0, f, 1$, поле как $\{\mathbf{E}_t^s, \mathbf{H}_t^s\}$. Применительно к данному случаю суть МДИ [5] состоит в представлении искомого поля вне рассеивателя в виде конечной линейной комбинации полей диполей, которая удовлетворяет системе уравнений Максвелла в областях $D_{0,f,1,i}$, условиям на бесконечности, а также условиям сопряжения для тангенциальных компонент полей на $\Xi_{f,1}$. Тогда определение неизвестных амплитуд дискретных источников (ДИ) производится из условий сопряжения для полей только на поверхности частицы:

$$\mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_f^s) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{E}_f^0; \quad \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_f^s) = \mathbf{n}_p \times \mathbf{H}_f^0. \quad (2)$$

Поскольку рассматриваемая структура частица–подложка более не является осесимметричной, то нет возможности непосредственно использовать подход, столь успешно реализованный в работе [3].

В основу представления для рассеянного частицей поля положим источники электрического типа, удовлетворяющие условиям сопряжения для полей на поверхностях $\Xi_{f,1}$. В этом случае векторный потенциал принимает вид

$$\mathbf{A}(M) = \int_V \overset{\leftrightarrow}{G}(M, P) \mathbf{j}(P) d\tau_P.$$

Здесь $\overset{\leftrightarrow}{G}(Q, P)$ — тензор Грина слоистой среды [6]. При этом для компонент тензора Грина справедливы следующие представления, включающие интегралы Зоммерфельда:

$$\begin{aligned} G_{11}(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) \nu_{11}^e(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ G_{33}(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) \nu_{11}^h(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ g(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) \nu_{31}(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $J_0(\cdot)$ — цилиндрическая функция Бесселя, (ρ_0, ϕ_0, z_0) — цилиндрические координаты точки

$M_0 \in D_i$. В данном случае для спектральных функций $\nu_{11}^{e,h}$, ν_{31} имеют место те же представления, что и в работе [3].

Будем строить представление для рассеянного в $D_{0,f,1}$ поля на основе системы электрических диполей, локализованных в точках M_n , которые распределены всюду плотно на вспомогательной поверхности $S_0 \in C^{(1,\alpha)}$, $\overline{\{M_n\}}_{n=1}^\infty = S_0$. Поверхность S_0 располагается строго внутри D_i .

Для рассеянного в $D_{0,f,1}$ поля, удовлетворяющего условиям сопряжения на границе слоя и подложки, справедливо следующее представление:

$$\mathbf{E}_t^N(M) = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{l=1}^3 p_{nl}^0 \text{rot rot } \mathbf{A}_n^l(M), \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_t^N(M) = \frac{i}{k\mu_t} \text{rot } \mathbf{E}_t^N(M), \quad t = 0, f, 1; \quad M \in D_t.$$

Приступим к построению приближенного решения внутри пронизываемой частицы D_i . Введем в рассмотрение следующую систему векторных потенциалов:

$$\mathbf{A}_{ni}^l(M) = j_0(k_i R_{MM_n}) \mathbf{e}_l; \quad M_n \in S_0,$$

где $j_0(\cdot)$ — сферическая функция Бесселя. Тогда представление для полного поля внутри частицы принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^N(M) &= \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{l=1}^3 p_{nl}^i \text{rot rot } \mathbf{A}_{ni}^l(M), \\ \mathbf{H}_i^N(M) &= \frac{i}{k\mu_i} \text{rot } \mathbf{E}_i^N(M), \quad M \in D_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Как уже отмечалось ранее, представление (4), (5) удовлетворяет всем условиям граничной задачи (1), за исключением условий сопряжения на поверхности частицы (2). Введем в рассмотрение вектор амплитуд ДИ $\mathbf{p}^N = \left[\left\{ \{p_{nl}^0\}_{n=1}^{N_0} \right\}_{l=1}^3; \left\{ \{p_{nl}^i\}_{n=1}^{N_i} \right\}_{l=1}^3 \right]$, который будем определять из условия

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^N := \arg \min \left\{ \left\| \mathbf{n}_p \times \left(\mathbf{E}_i^N - \mathbf{E}_f^N - \mathbf{E}_f^0 \right) \right\|_{L_2(\partial D)} + \right. \\ \left. + \left\| \mathbf{n}_p \times \left(\mathbf{H}_i^N - \mathbf{H}_f^N - \mathbf{H}_f^0 \right) \right\|_{L_2(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя свойство полноты системы электрических диполей, всюду плотно расположенных на вспомогательной поверхности S_0 , и теорему корректности [5], можно показать сходимость в равномерной норме приближенного решения (4), (5) к точному решению задачи (1) в любом компакте $c \subset D_t$, $t = 0, f, 1$.

2. Схема вычислительного алгоритма

Изложим кратко схему вычислительного алгоритма. Как уже отмечалось выше, определение вектора

амплитуд ДИ \mathbf{p}^N проводится из условия (6). Для приближенного решения задачи минимизации (6) используем обобщенный метод коллокаций [5]. Для этого выберем на поверхности частицы множество точек коллокаций $\{P_j\}_{j=1}^J \in \partial D$, равномерно покрывающих поверхность целиком. Амплитуды ДИ, локализованных на вспомогательной поверхности внутри рассеивателя, определяем, решая полученную переопределенную систему линейных уравнений с матрицей размерности $4J \times 3 (N_0 + N_i)$. Как и в осесимметричном случае, МДИ предоставляет возможность апостериорной оценки точности полученного решения посредством вычисления функционала невязки на поверхности частицы в среднеквадратичной норме (6).

Отметим характерные отличия настоящего подхода от рассмотренного ранее случая осесимметричной структуры [3]. Основное состоит в том, что приближенное решение в данном случае не зависит от поляризации внешнего возбуждения. Это позволяет решать задачу рассеяния сразу для всего набора углов падения и двух базовых поляризаций. Кроме того, в представлении для рассеянного поля (4) входят лишь дипольные источники, а не мультиполи. Последнее обстоятельство существенно облегчает вычисление интегралов Зоммерфельда (3) и делает схему вычисления амплитуд более устойчивой.

Как и в осесимметричном случае, для вычисления интенсивности рассеянного поля на бесконечности необходимо иметь диаграмму рассеяния $\mathbf{F}(\theta, \phi)$ [3]. Для получения конкретного вида диаграммы рассеяния достаточно использовать асимптотические представления для интегралов Зоммерфельда, как это сделано в работе [5]. Тогда для θ, ϕ -компонент диаграммы рассеяния имеем

$$F_\theta(\theta_0, \theta, \phi) = ik_0 \sum_{n=1}^{N_0} \{p_{n1}^0 f_\theta^\rho + p_{n2}^0 f_\theta^\phi + p_{n3}^0 f_\theta^z\}, \quad (7)$$

$$F_\phi(\theta_0, \theta, \phi) = ik_0 \sum_{n=1}^{N_0} \{p_{n1}^0 f_\phi^\rho + p_{n2}^0 f_\phi^\phi\},$$

$$f_\theta^\rho = \{\cos \theta \tilde{\nu}_{11}^e(k_0 \sin \theta) + ik_0 \sin^2 \theta \tilde{\nu}_{31}(k_0 \sin \theta)\} \times \cos(\phi - \phi_n) \gamma^+,$$

$$f_\theta^\phi = \{\cos \theta \tilde{\nu}_{11}^e(k_0 \sin \theta) + ik_0 \sin^2 \theta \tilde{\nu}_{31}(k_0 \sin \theta)\} \times \sin(\phi - \phi_n) \gamma^+,$$

$$f_\theta^z = -\sin \theta \tilde{\nu}_{11}^h(k_0 \sin \theta) \gamma^+,$$

$$f_\phi^\rho = -\tilde{\nu}_{11}^e(k_0 \sin \theta) \sin(\phi - \phi_n) \gamma^+,$$

$$f_\phi^\phi = \tilde{\nu}_{11}^e(k_0 \sin \theta) \cos(\phi - \phi_n) \gamma^+,$$

$$\gamma^+ = \exp\{ik_0 \rho_n \sin \theta \cos(\phi - \phi_n)\}.$$

Здесь (ρ_n, ϕ_n, z_n) — цилиндрические координаты точки $M_n \in S_0$, а соответствующие спектральные функции имеют вид, указанный в работе [3].

3. Обсуждение результатов

Размеры загрязняющих микрочастиц существенно меньше длины волны лазерного излучения и в сотни раз меньше диаметра лазерного пятна, так что модель P - или S -поляризованной плоской волны представляет собой адекватное описание внешнего возбуждения. В настоящее время поверхностные сканеры способны обнаруживать микрочастицы, эквивалентные сфере с диаметром до 0,06 мкм [1]. Наиболее распространенная длина волны лазера $\lambda = 0,488$ мкм. Подобные микрочастицы часто называют “рэлеевскими” и используют в качестве модели подобной частицы эквивалентный сферический шарик. Большинство результатов, положенных в основу современных конструкций поверхностных сканеров, основано на анализе рассеивающих свойств сферических частиц.

В настоящей работе в качестве основной расчетной характеристики рассеяния рассматривается интенсивность рассеяния

$$I^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi) = |F_\theta^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi)|^2 + |F_\phi^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi)|^2, \quad (8)$$

где $F_{\theta, \phi}^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi)$ — компоненты диаграммы рассеяния (7), соответствующие P - и S -поляризации возбуждающей плоской волны (размерность интенсивности (8) — мкм²), а также интегральный поперечник рассеяния

$$R^{P,S}(\theta_0) = \int_{\Omega} I^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi) d\omega,$$

где телесный угол $\Omega = \{0 \leq \phi \leq 360^\circ; 0 \leq \theta \leq 80^\circ\}$.

Будем рассматривать микрочастицы сфероидальной формы, большая ось которых параллельна подложке. При этом малая ось должна быть меньше толщины слоя, так как частица целиком расположена в слое. Полагаем, что все частицы эквивалентны сфере диаметром $D = 0,06$ мкм. Рассмотрим два варианта расположения частицы по отношению к плоскости падения (ZX): большая ось сфероиды параллельна плоскости падения (конфигурация ZX) и большая ось перпендикулярна плоскости падения (конфигурация ZY). Будем полагать, что подложка выполнена из кремния с индексом рефракции, равным $4,37 - 0,08i$, а слой — из оксида кремния SiO_2 с индексом рефракции 1,46. Здесь и далее даны индексы рефракции, соответствующие длине волны $\lambda = 0,488$ мкм.

В качестве вспомогательной в данном случае выбиралась сфероидальная поверхность, эквидистантная поверхности рассеивателя, а точки M_n распределялись равномерно на ней. Невязка во всех расчетах не превышала 5% в среднеквадратичной норме, что гарантирует погрешность результатов в пределах 5%.

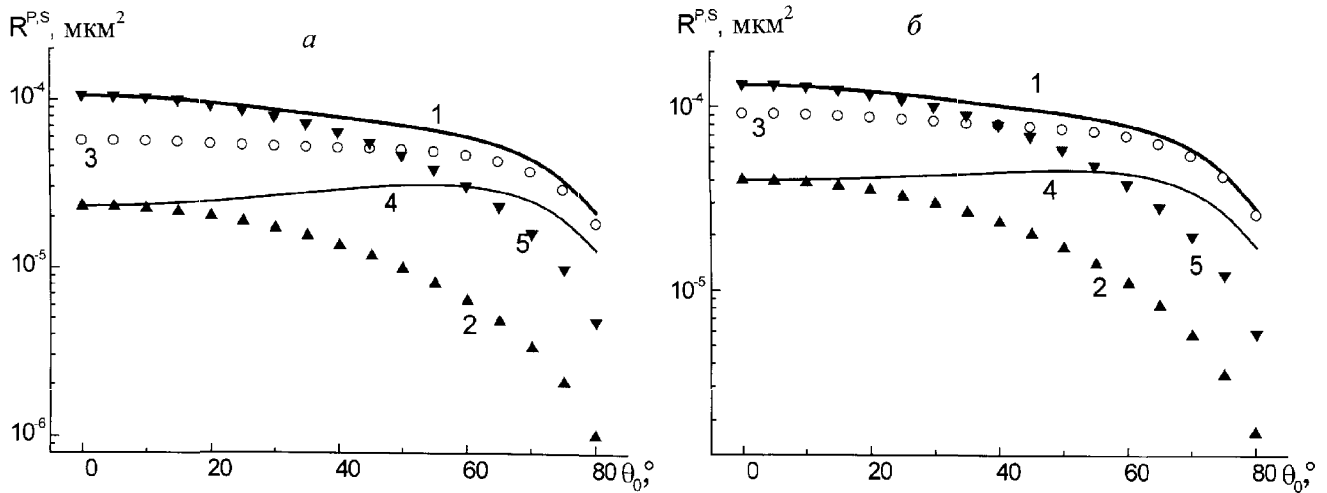


Рис. 1. Зависимость интегрального поперечника рассеяния от угла падения для кремниевой (а) и вольфрамовой (б) сфероида с соотношением осей $b/a = 2$ в слое толщиной 0,2 мкм. Кривая 1 — ZX, P-поляризация; 2 — ZX, S-поляризация; 3 — сфера, P-поляризация; 4 — ZY, P-поляризация; 5 — ZY, S-поляризация

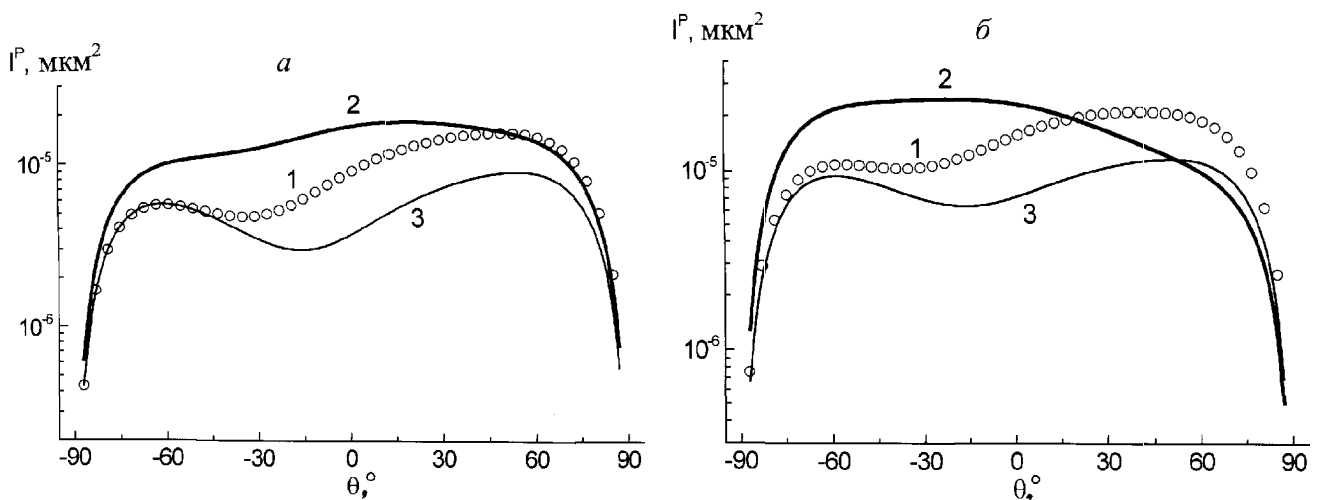


Рис. 2. Зависимость интенсивности рассеяния для кремниевой (а) и вольфрамовой (б) частицы от угла наблюдения ($\theta_0 = -60^\circ$, P-поляризация): 1 — сфера; 2 — ZX; 3 — ZY

Зависимость интегрального поперечника рассеяния от угла падения приведена на рис. 1, а, б. Представлены кривые для кремниевых (с индексом рефракции, равным $4,37 - 0,08i$) и вольфрамовых ($3,36 - 2,66i$) микрочастиц, соответствующие разным поляризациям и конфигурациям. Для сравнения приведены кривые, соответствующие P-поляризации для эквивалентной сферы ($D = 0,06$ мкм). Видно, что при больших углах падения различия, присущие разным расположениям сфероида, менее заметны.

Интенсивности рассеяния для P-поляризации сферической частицы и сфероида ($b/a = 2$) из кремния и вольфрама в зависимости от угла наблюдения приведены на рис. 2. Основной результат состоит в том, что даже для частиц сравнительно малого диаметра (меньшего шестой части длины падающей волны в слое) интенсивности, соответствующие различным положениям сфероида, различаются на порядок.

На рис. 3 приведена зависимость интегрального поперечника рассеяния от соотношения осей сфероида для кремниевой частицы при разных углах

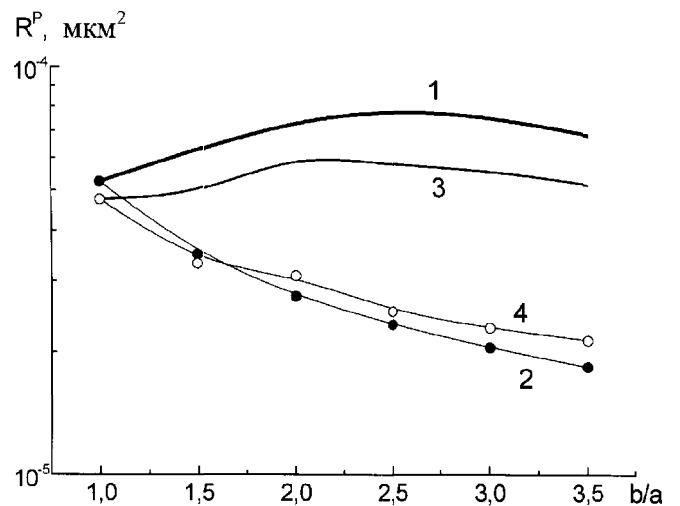


Рис. 3. Зависимость интегрального поперечника рассеяния для кремниевой частицы от соотношения осей сфероида (P-поляризация): кривая 1 — ZX, $\theta_0 = 40^\circ$; 2 — ZY, $\theta_0 = 40^\circ$; 3 — ZX, $\theta_0 = 60^\circ$; 4 — ZY, $\theta_0 = 60^\circ$

падения для P -поляризованного излучения. Как видно из рисунка, при увеличении деформации и уменьшении угла падения результаты сильнее зависят от расположения частицы по отношению к плоскости падения.

Литература

1. Valiga J. // *Semicond. International*. 1997. No. 4. P. 64.
2. Еремин Е.Ю., Орлов Н.В., Свешников А.Г. // *Электромагнитные волны*. 1998. № 5. С. 34.
3. Еремина Е.Ю., Свешников А.Г. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ.*

Астрон. 1999. № 1. С. 12 (*Moscow University Phys. Bull.* 1999. No. 1. P. 8).

4. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М.: Наука, 1970.
5. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. *Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
6. Дмитриев В.И. *Поля в слоистых средах*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

Поступила в редакцию
27.03.00

УДК 517.958:621.372.8

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ РАДИОВОЛНОВОДА

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Проводится обоснование базисности системы корневых векторов цилиндрического волновода кругового сечения с радиальным диэлектрическим заполнением. Доказанное свойство позволяет обосновать применение метода нормальных волн к задаче возбуждения волновода.

Полнота системы корневых векторов волновода рассматривалась в работах [1] и [2], однако вопросы базисности изучаемых систем в них не обсуждались. В работах [3, 4] установлена полнота системы корневых векторов волновода для достаточно общего вида диэлектрической и магнитной проницаемости. В настоящей работе, которая продолжает тему [3, 4], показывается, что цилиндрический волновод с радиальной диэлектрической проницаемостью является примером такого, у которого система корневых векторов не только полна, но и образует базис со скобками.

1. Постановка задачи

Пусть поперечное сечение Ω волновода есть круг единичного радиуса. Поместим в некоторую точку на оси цилиндра начало координат цилиндрической системы координат, ось Oz направим по оси цилиндра. Пусть волновод заполнен веществом с кусочно-непрерывной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r, \varphi, z) = \epsilon(r)$, значения которой лежат между константами ϵ_1 и $\epsilon_2 > 0$, и с магнитной проницаемостью $\mu(r, \varphi, z) \equiv 1$. Пусть стенки волновода идеально проводящие.

Будем искать решения уравнений Максвелла в виде нормальных волн $E, H \sim \exp^{-i\omega t + i\gamma z + in\varphi}$. Система уравнений Максвелла включает восемь уравнений для шести неизвестных, поэтому следует выбрать из уравнений шесть основных. В нашем случае удобно выбрать следующие:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z - i\gamma H_\varphi + ik\epsilon E_r = 0, \\ i\gamma H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z + ik\epsilon E_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\epsilon E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\epsilon E_\varphi) + i\gamma \epsilon E_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z - i\gamma E_\varphi - ikH_r = 0, \\ i\gamma E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z - ikH_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\varphi + i\gamma H_z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначение

$$X = (H_r, H_\varphi, E_z)^T = (H, E_z)^T.$$

Тогда, исключая из (1) и (2) функции E_r, E_φ и H_z и учитывая зависимость от φ , приходим к задаче на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + k^2 \epsilon r & inr \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} & -k\epsilon n \\ in \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & -\frac{n^2}{r} + k^2 \epsilon r & -ik\epsilon r \frac{\partial}{\partial r} \\ kn\epsilon & ik \frac{\partial}{\partial r} r\epsilon & \frac{\partial}{\partial r} r\epsilon \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\epsilon}{r} n^2 \end{pmatrix} X = \gamma^2 r \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \epsilon \end{pmatrix} X, \quad (3)$$