

при любом $y \in W^1$. С другой стороны, B — ограниченный оператор, т. е. $\|B\|_1 = b$, поэтому

$$\|By\|_1^2 \leq (By, By)_1 \leq b |(y, By)_1| = b |b(y)|.$$

Согласно п. 2,

$$|b(X)| \leq C \|X\|_1 \|X\|_0,$$

отсюда

$$\|By\|_1^2 \leq b |b(y)| \leq Cb \|y\|_1 \|y\|_0,$$

что и означает p -подчиненность ($p = 1/2$) оператора BG оператору G .

Остается заметить, что коль скоро $\lambda_n \approx n^2$, то для $N(r)$ — суммы кратностей всех собственных значений G , меньших r , — имеет место соотношение

$$\text{const} \cdot N^2 = r \quad \text{или} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{r}} N(r) < \infty.$$

Но это означает, что выполнены все условия теоремы о базисности корневых векторов пучка Келдыша, поэтому верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Система корневых векторов задачи (6) образует безусловный базис со скобками в W^1 .

Эта теорема позволяет завершить обоснование метода нормальных волн для данного класса радиоволноводов [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

Литература

1. Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И. // ДАН СССР. 1982. 264, № 5. С. 1123.
2. Смирнов Ю.Г. // Дифф. уравнения. 1991. 27, № 1. С. 140.
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. // Докл. РАН. 1999. 369, № 4. С. 1.
4. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1999. 39, № 11. С. 1869.
5. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. Келдыш М.В. Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1985.
8. Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных пучков. Кишинев: Штиница, 1986.

Поступила в редакцию
29.03.00

УДК 530.145

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УДЕРЖИВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

О. С. Павлова, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики;
кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Методом интегральных преобразований находится энергетический спектр радиального уравнения Шрёдингера с удерживающим потенциалом степенного роста на бесконечности. Задача сведена к приближенному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. С помощью численных расчетов определен спектр S -состояния уравнения Шрёдингера с линейно растущим потенциалом.

Одной из важных задач квантовой физики является нахождение энергетического спектра уравнения Шрёдингера (УШ) с локальными удерживающими потенциалами. Однако радиальное УШ с произвольным орбитальным квантовым числом $l = 0, 1, \dots$ имеет точное решение только для одного потенциала такого рода — осцилляторного (в том числе и для его комбинации с потенциалом $1/r^2$) и некоторых его модификаций, которые, например, могут быть получены методом обратной задачи квантовой теории рассеяния [1]. Поэтому очень важны разработки новых приближенных методов нахождения спектра УШ с удерживающими потенциалами более сложного вида.

В данной работе мы определяем спектр УШ с

физическим потенциалом

$$V(r) = ar^K - \frac{Z}{r} + \frac{A}{r^2}, \quad a > 0, \quad K = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

который представляет собой комбинацию удерживающего потенциала степенного роста, дальнегодействующих кулоновского потенциала и потенциала вида $1/r^2$. При этом мы используем метод интегральных преобразований, примененный в работах [2–4].

Рассмотрим радиальное уравнение Шрёдингера (УШ) (выбрано $2m = 1$, $\hbar = 1$) с удерживающим потенциалом (1):

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - ar^K\Psi - \frac{l(l+1) + A}{r^2}\Psi + \frac{Z}{r}\Psi + \mathcal{E}\Psi = 0, \quad (2)$$

которое при $A > -(2l+1)^2/4$ (l фиксировано) имеет дискретный спектр энергий с бесконечным числом уровней \mathcal{E}_n , $n = 0, 1, \dots$.

Введем новую переменную $x = a^{1/2}r^\nu/\nu$, $\nu = 1 + K/2$, и обозначим $B = A + l(l+1)$, $z = a^{-1/2\nu}Z$, $E = a^{-1/\nu}\mathcal{E}$, тогда УШ (2) принимает вид

$$\nu x \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \Psi \right) + (\nu - 1) \frac{d\Psi}{dx} - \frac{B}{\nu x} \Psi + z(\nu x)^{-1+1/\nu} \Psi + E(\nu x)^{-1+2/\nu} \Psi = 0. \quad (3)$$

Если определен спектр уравнения (3), то при заданных значениях параметров Z, ν, a уровни энергии УШ (2) определяются формулой

$$\mathcal{E}_n(a, Z, \nu) = a^{1/\nu} E_n(a^{-1/2\nu} Z, \nu). \quad (4)$$

Квадратично-интегрируемые решения УШ (3) имеют следующее поведение в нуле и на бесконечности:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\sim x^\beta \text{ при } x \rightarrow 0, \\ \Psi(x) &\sim e^{-x} \text{ при } x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{1}{2\nu}(1 + \sqrt{1 + 4B}).$$

Следуя работе [4], применим к УШ (3) обобщенное преобразование Лапласа вида

$$\langle \varphi \rangle = \frac{\omega^{-2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^\infty e^{-x/\omega} \varphi(x) x^{\alpha-1} dx, \quad (6)$$

где $\sigma = \beta + 1 - 1/\nu$, $\alpha = (\beta + \sigma)/2 = (\nu + \sqrt{1 + 4B})/2\nu$.

Подобно работам [2-4], спектр УШ будем определять из условия регулярности функции $\tilde{\Phi}(\omega) \equiv \langle \Psi \rangle$ в точке $\omega = 1$.

УШ в лапласовском представлении может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2) \frac{d\tilde{\Phi}(\omega)}{d\omega} - 2\alpha\omega\tilde{\Phi}(\omega) + \frac{E}{2}\delta_{\nu 2}\tilde{\Phi}(\omega) = \\ = -(1 - \delta_{\nu 2})E\nu^{-2+2/\nu} \langle x^{-1+2/\nu}\Psi \rangle - \\ - z\nu^{-1+1/\nu} \langle x^{-1+1/\nu}\Psi \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где специально выделен случай $K = 2$ (т.е. $\nu = 2$), когда функция $\langle x^{-1+2/\nu}\Psi \rangle = \Phi(\omega)$, и обозначено $\delta_{\nu 2} = \begin{cases} 1 & \text{для } \nu = 2, \\ 0 & \text{для } \nu \neq 2. \end{cases}$

После подстановки в уравнение (7) интегральных представлений функций $\langle x^{-1+1/\nu}\Psi \rangle$ и $\langle x^{-1+2/\nu}\Psi \rangle$, найденных в работе [4], основное урав-

нение задачи принимает вид

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2) \frac{d\tilde{\Phi}(\omega)}{d\omega} - 2\alpha\omega\tilde{\Phi}(\omega) + \frac{E}{2}\delta_{\nu 2}\tilde{\Phi}(\omega) = \\ = \frac{z\nu^{-2+1/\nu}\omega^{-1+1/\nu}}{\Gamma(1 - 1/\nu)} \int_0^1 (1-t)^{-1/\nu} t^{2\alpha-2+1/\nu} \tilde{\Phi}(t\omega) dt - \\ - (1 - \delta_{\nu 2}) \frac{E\nu^{-2+2/\nu}\omega^{-1+2/\nu}}{\Gamma(1 - 2/\nu)} \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^{-2/\nu} t^{2\alpha-2+2/\nu} \tilde{\Phi}(t\omega) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем в уравнении (8) к новой переменной $y = (1 - \omega)/(1 + \omega)$. Тогда точке $\omega = 1$ соответствует точка $y = 0$. Поэтому спектр задачи определяется из требования регулярности функции $\tilde{\Phi}(y) \equiv \tilde{\Phi}(\omega)$ в точке $y = 0$ [2-4].

Удобно представить функцию $\tilde{\Phi}(y)$ в виде [4, 5]

$$\tilde{\Phi}(y) = 2^{-2\alpha}(1+y)^{2\alpha} D(y), \quad (9)$$

причем функция $D(y)$ (как и функция $\tilde{\Phi}(y)$) для квадратично-интегрируемых решений УШ может быть разложена в ряд по степеням y :

$$D(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

Замена переменных в (8) $\omega = (1 - y)/(1 + y)$, $\omega t = (1 - v)/(1 + v)$ и подстановка представления (9) приводят к уравнению

$$y \frac{dD}{dy} + \left(\alpha - \frac{E}{4}\delta_{\nu 2} \right) D = E(1 - \delta_{\nu 2}) I\left(\frac{2}{\nu}, y\right) + z I\left(\frac{1}{\nu}, y\right), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon}\nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1 - \epsilon)} (1 - y)^{\epsilon-2\alpha} \times \\ \times \int_y^1 (1-v)^{2\alpha+\epsilon-2} (v-y)^{-\epsilon} D(v) dv. \end{aligned} \quad (11)$$

Входящая в правую часть уравнения (10) функция $I(\epsilon, y)$ (при $\epsilon = 2/\nu$, $\epsilon = 1/\nu$) также может быть разложена в ряд по степеням y : $I(\epsilon, y) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\epsilon) y^n$.

Тогда основное уравнение задачи (10) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно величин a_n :

$$\left(n + \alpha - \frac{E}{4}\delta_{\nu 2} \right) a_n = (1 - \delta_{\nu 2}) E I_n\left(\frac{2}{\nu}\right) + z I_n\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (12)$$

Значения коэффициентов разложения $I_n(\epsilon)$ можно получить с помощью прямого и обратного преобразования Меллина, как делалось, например, в работе [2] для четных одномерных потенциалов, при

этом такой расчет хотя и несложен, но весьма утомителен. Однако выражение $I_n(\epsilon)$ (в несколько ином представлении) может быть получено чрезвычайно простым способом, который мы здесь приводим.

Вводя новую переменную $\xi = (1 - v)/(1 - y)$ в интеграле (11) и записав $D(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k$, можно представить выражение для $I(\epsilon, y)$ в виде

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon} \nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)} (1-y)^{\epsilon-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \times \int_0^1 \xi^{2\alpha+\epsilon-2} (1-\xi)^{-\epsilon} [1 - (1-y)\xi]^k d\xi. \tag{13}$$

Учитывая, что $(1-y)\xi \leq 1$, можно воспользоваться разложением

$$[1 - (1-y)\xi]^k = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m k! (1-y)^m}{m! \Gamma(k-m+1)} \xi^m,$$

тогда формула (13) принимает вид

$$I(\epsilon, y) = \frac{2^{-\epsilon} \nu^{\epsilon-2}}{\Gamma(1-\epsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (1-y)^{m+\epsilon-1}}{m!(k-m)!} \times \int_0^1 \xi^{2\alpha+m+\epsilon-2} (1-\xi)^{-\epsilon} d\xi = 2^{-\epsilon} \nu^{\epsilon-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m (1-y)^{m+\epsilon-1}}{m!(k-m)!} \times \frac{\Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{\Gamma(2\alpha+m)}.$$

Отсюда, разложив множитель $(1-y)^{m+\epsilon-1}$ по степеням y , получаем окончательную формулу для величины $I_n(\epsilon)$:

$$I_n(\epsilon) = 2^{-\epsilon} \nu^{\epsilon-2} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \times \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \Gamma(m+\epsilon) \Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{m!(k-m)! \Gamma(m+\epsilon-n) \Gamma(2\alpha+m)}. \tag{14}$$

Теперь основное уравнение задачи (12) может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{B_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]\} a_k = 0, \tag{15}$$

где

$$B_{nk} = E(1 - \delta_{\nu 2}) B_{nk} \left(\frac{2}{\nu}\right) + z B_{nk} \left(\frac{1}{\nu}\right),$$

$$B_{nk}(\epsilon) = 2^{-\epsilon+2} \nu^{\epsilon-2} \frac{(-1)^n k!}{n!} \times \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m!(k-m)!} \frac{\Gamma(m+\epsilon) \Gamma(2\alpha+m+\epsilon-1)}{\Gamma(m+\epsilon-n) \Gamma(2\alpha+m)}.$$

Спектр \mathcal{E}_n УШ (2) находится из характеристического уравнения

$$\det \|B_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]\| = 0 \tag{16}$$

с помощью формулы (4), причем при определении корней уравнения (16) бесконечная матрица $\|B_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]\|$ заменяется конечной ранга N . Заметим, что несколько нижних уровней энергии УШ можно получить из уравнения (16) и методом теории возмущений [6]. Однако в общем случае расчет спектра может быть выполнен предложенным методом с помощью ЭВМ.

Из формулы (16) видно, что в матрице $\|B_{nk} + [E\delta_{\nu 2} - 4(n+\alpha)\delta_{nk}]\|$ достигнута максимально возможная степень диагонализации, что связано с удачным выбором представления (9). Так, для потенциала $V(r) = r^2 + A/r^2$ в (16) присутствуют только диагональные члены матрицы, что сразу приводит к точному спектру осциллятора:

$$\mathcal{E}_{nl} = 4(n+\alpha), \quad \alpha = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{1 + 4l(l+1) + 4A} \right).$$

В качестве примера возможностей предложенного метода приведем результаты расчета энергетического спектра для линейного потенциала $V(r) = r$ при $l = 0$ ($a = 1, \nu = 3/2$ и $E_n(N) = \mathcal{E}_n(N)$) (см. таблицу). В таблице дана зависимость пяти первых корней характеристического уравнения (16) от ранга N конечной матрицы ($N = 1, 2, \dots, 9$) и их предельные значения, являющиеся в данном случае нулями функции Эйри $Ai(x)$, которые взяты из справочника [7].

Зависимость значений уровней энергии от ранга матрицы

Ранг матрицы N	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
1	2,48400				
2	2,33836	4,83764			
3	2,33834	4,11221	7,35967		
4	2,33820	4,08925	5,67530	10,11850	
5	2,33815	4,08806	5,53325	7,24029	13,09170
6	2,33813	4,08803	5,52077	6,85138	8,87834
7	2,33812	4,08800	5,52066	6,79033	8,14081
8	2,33812	4,08798	5,52061	6,78703	7,96751
9	2,33811	4,08797	5,52060	6,78675	7,94621
Нули $Ai(x)$	2,33811	4,08795	5,52056	6,78671	7,94413

Из таблицы видно, что процедура приближенного нахождения корней E_n характеристического уравнения (16) быстро сходится с ростом ранга N конечной матрицы. Так, например, уровень энергии основного состояния УШ E_0 , полученный из характеристического уравнения (16), который должен совпадать с первым нулем функции Эйри $Ai(x)$, определяется с точностью 5 знаков после запятой уже для ранга

матрицы $N = 9$, причем вычисления на ЭВМ занимают несколько минут. Вполне естественно, что при заданном значении N нижние уровни энергии имеют большую точность, так как они вычисляются в более высоком приближении. Например, рангу матрицы $N = 9$ соответствует девятое приближение корня E_0 характеристического уравнения, тогда как корень E_4 при этом вычисляется лишь в пятом приближении.

Максимально возможная диагонализация матрицы в уравнении (16) приводит еще и к тому, что корни уравнения $E_n(N)$ с ростом N монотонно (без осцилляций) приближаются к предельным значениям $E_n(\infty)$, совпадающим с нулями функции Эйри $Ai(x)$.

Заметим, что в нашем подходе определение энергетического спектра УШ значительно проще и точнее, чем при использовании стандартной теории возмущений, в которой для получения подобной точности требуется проведение значительно более сложных вычислений.

В заключение отметим, что предложенный способ приближенного нахождения спектра УШ может быть использован для решения ряда практических задач ядерной физики и физики элементарных частиц. Например, один из методов исследования состояний кваркония J/Ψ и Υ связан именно с введением межкваркового потенциала вида (1) с $K = 1$ или $K = 2$. Использование даже таких простых потенциалов дает хорошее совпадение низших состояний кварковых систем с экспериментальными данными [8]. Естественно, большей точности в совпадении с опытными данными можно ожидать

при использовании удерживающих потенциалов вида $V(r) = ar^2 + br - Z/r + A/r^2 + a_0$ (и их обобщений), которые будут рассмотрены в следующей работе.

Авторы искренне благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Гостев В.Б., Минеев В.С., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1982. № 2. С. 75 (Moscow University Phys. Bull. 1982. No. 2. P. 86).
2. Вишвецев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н. // ТМФ. 1996. 109, № 1. С. 107.
3. Вишвецев А.С., Вишвецев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 5. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5. P. 76).
4. Павлова О.С., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 58 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 69).
5. Павлова О.С., Баскаран Д., Френкин А.Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 5. С. 14 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 5).
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. Quigg C., Rosner J.L. // Phys. Rep. 1979. 56. P. 167.

Поступила в редакцию
03.04.00

УДК 621.383.8

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДЕФЛЕКТОРА С ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Н. Е. Шапкина

(кафедра математики)

Рассмотрена трехмерная математическая модель диэлектрического дефлектора с электрооптическим управлением. Предложен метод расчета электрического поля внутри кристалла дефлектора, адекватно учитывающий форму электродов. Исследована область применимости разработанной ранее двумерной модели.

Анализируемый дефлектор [1, 2] представляет собой одноосный анизотропный кристалл $LiNbO_3$, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, на противоположные грани которого симметрично нанесены электроды в виде прямоугольных треугольников (рис. 1). На электроды подается постоянное напряжение. Кристалл описывается диагональным тензором ϵ диэлектрической проницаемости: $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_x$; $\epsilon_{33} = \epsilon_z$.

В работах [3, 4] было рассчитано электрическое поле для случая бесконечной периодической дифракционной решетки, состоящей из лент бесконечной длины и постоянной ширины. Это позволило свести трехмерную задачу к ансамблю двумерных задач,

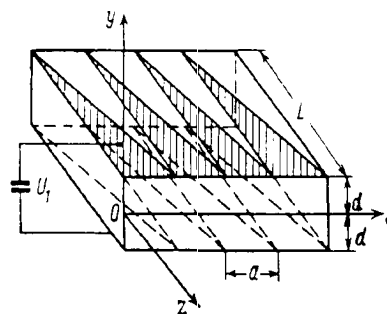


Рис. 1. Общий вид электрооптического дефлектора

каждая из которых относится к лентам определенной ширины. Такой подход дает возможность при-