

УДК 517.947.42

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

А. И. Сгибнев, П. А. Крутицкий

(кафедра математики)

Построено явное решение краевой задачи для гармонической функции вне разреза, лежащего на дуге окружности. На одном берегу разреза задано условие Дирихле, а на другом — условие Неймана. Решение задачи основано на ее сведении к задаче Римана–Гильберта.

Постановка задачи и теорема единственности

На плоскости (x_1, x_2) введем полярные координаты $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Угол θ возрастает в направлении против часовой стрелки. Рассмотрим разрез L , представляющий собой дугу единичной окружности: $L = \{r = 1, \theta \in (a, b)\}$, где a, b — концы контура L , $0 \leq a < b < 2\pi$. Определим левый и правый берега разреза L : $L^+ = \{r = 1 - 0, \theta \in (a, b)\}$ — левый берег, $L^- = \{r = 1 + 0, \theta \in (a, b)\}$ — правый берег. Далее индексами «-» и «+» у функций обозначим предельные значения этих функций на L при подходе к правому и левому берегу соответственно.

Определим класс гладкости H_L^0 . Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу H_L^0 , если выполняются следующие условия:

а) $u(x)$ непрерывна вне L , непрерывно продолжима на L слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы L ;

б) частные производные u_{x_1}, u_{x_2} непрерывны вне L , непрерывно продолжимы на L слева и справа всюду, за исключением, быть может, концов L , в которых эти функции могут иметь интегрируемые особенности, т. е. при $|x - d| \rightarrow 0$ справедлива оценка $|u_{x_1}|, |u_{x_2}| < c|x - d|^{-1+\epsilon}$, где c, ϵ — некоторые положительные постоянные, $d = (\cos a, \sin a)$ либо $d = (\cos b, \sin b)$.

Дадим строгую математическую постановку задачи.

Задача \mathcal{K} . Найти функцию $u(x)$ из класса H_L^0 , гармоническую вне L и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{L^+} = \widehat{Q}^+(t) \quad \text{на } L^+, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{L^-} = Q^-(t) \quad \text{на } L^- \quad (2)$$

(условия Дирихле и Неймана соответственно), где $t = e^{i\theta} \in L$; функции $\widehat{Q}^+(t) \in C^{1,\lambda}(\overline{L})$ и $Q^-(t) \in C^{0,\lambda}(\overline{L})$ являются заданными и показатель Гёльдера $\lambda \in (0, 1]$. Кроме того, при $|x| \rightarrow \infty$ функция $u(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$u = O(1); |\nabla u| = O(|x|^{-2}). \quad (3)$$

Теорема 1. Если решение задачи \mathcal{K} существует, то оно единственно.

Доказательство основано на методе энергетических тождеств.

Модификация задачи

Решение задачи \mathcal{K} будем строить методом, предложенным в работе [1]. Его идея состоит в том, чтобы свести смешанную задачу для гармонических функций к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. Рассмотрим плоскость переменной $x = (x_1, x_2)$ и комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$.

Введем класс гладкости h_L^0 . Будем говорить, что аналитическая функция $w(z)$ принадлежит классу h_L^0 , если она

а) кусочно-голоморфна с линией скачков L ,

б) ограничена на бесконечности,

в) непрерывно продолжима на L слева и справа во всех точках, за исключением, быть может, концов дуги L , где может иметь интегрируемые особенности, т. е. $|w(z)| < c|z - e^{id}|^{-1+\epsilon}$, где c, ϵ — некоторые положительные константы, $d = a$ или $d = b$.

Пусть $u(x)$ — решение задачи \mathcal{K} . Рассмотрим гармонически сопряженную к $u(x)$, вообще говоря, неоднозначную функцию $v(x)$. Построим однозначную аналитическую функцию $\Psi(z) = u(x) + iv(x)$. Тогда $\Phi(z) = z\Psi_z(z) = z(u_{x_1} - iu_{x_2})$ — однозначная функция, аналитическая вне L , такая, что $\Phi(0) = 0$. Кроме того, $\Phi(\infty) = 0$, поскольку $|\Psi_z| = |\nabla u|$ и, согласно (3), $\Phi(z) = O(z^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$.

Поскольку $\Phi(t) = (\cos \theta + i \sin \theta)(u_{x_1} - iu_{x_2})$, $t = e^{i\theta}$, то $\operatorname{Re} \Phi = \cos \theta u_{x_1} + \sin \theta u_{x_2} = \partial u / \partial r$, $\operatorname{Re}[i\Phi] = -\sin \theta u_{x_1} + \cos \theta u_{x_2} = \partial u / \partial \theta$. Дифференцируя условие (1) по θ , получим, что оно эквивалентно следующим двум условиям:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{L^+} = Q^+(t) \equiv \frac{\partial \widehat{Q}^+(t)}{\partial \theta}, \quad t = e^{i\theta},$$

$$u(e^{ia}) = \widehat{Q}^+(e^{ia}). \quad (4)$$

Тем самым задаче \mathcal{K} отвечает следующая задача Римана–Гильберта.

Задача \mathcal{R} . Найти функцию $\Phi(z)$ из класса h_L^0 , такую, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0$, удовлетворяющую граничным условиям: $\operatorname{Re}[i\Phi^+(t)] = Q^+(t)$ на L^+ , $\operatorname{Re}[\Phi^-(t)] = Q^-(t)$ на L^- , $t = e^{i\theta}$. (Условие (4) в задаче \mathcal{R} не учитывается, оно будет учтено позже.)

Сведем задачу Римана–Гильберта к задаче сопряжения [1, 2]. Для этого, во-первых, преоб-

разумем граничные условия задачи \mathcal{R} к виду $\Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)} = -2iQ^+(t)$, $\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} = 2Q^-(t)$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Во-вторых, заметим, что если $Y(z) \in h_L^0$, то функция $Y_*(z) \equiv \overline{Y(1/\bar{z})}$ тоже принадлежит классу h_L^0 и на единичной окружности выполняется соотношение

$$Y^\pm(t) = \overline{Y_*^\mp(t)}. \tag{5}$$

Пусть $\Phi(z)$ — решение задачи \mathcal{R} . Введем функции

$$\varphi_1(z) = \Phi(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi_{1*}(z). \tag{6}$$

Заметим, что функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ принадлежат классу h_L^0 и в силу (5) удовлетворяют граничным условиям на L :

$$\varphi_1^+(t) = \varphi_2^-(t) - 2iQ^+(t), \quad \varphi_1^-(t) = -\varphi_2^+(t) + 2Q^-(t). \tag{7}$$

Таким образом, приходим к двумерной задаче сопряжения.

Задача \mathcal{S} . Найти функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$, принадлежащие классу h_L^0 , удовлетворяющие граничным условиям (7) на L и условиям $\varphi_s(0) = \varphi_s(\infty) = 0$, $s = 1, 2$.

Заметим, что всякому решению задачи \mathcal{R} соответствует решение задачи \mathcal{S} , построенное по формулам (6). Как показано в работе [2], всякое решение $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ задачи \mathcal{S} порождает решение задачи \mathcal{R} : $\Phi(z) = (1/2)[\varphi_1(z) + \varphi_{2*}(z)]$.

Построение решения

Чтобы двумерная задача \mathcal{S} распалась на две одномерные, произведем следующие замены:

$$\nu_1 = e^{i\pi/4} \varphi_1 + e^{-i\pi/4} \varphi_2, \quad \nu_2 = -e^{i\pi/4} \varphi_1 + e^{-i\pi/4} \varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} (\nu_1 - \nu_2), \quad \varphi_2 = \frac{e^{i\pi/4}}{2} (\nu_1 + \nu_2). \tag{8}$$

Тогда граничные условия (6) для функций $\nu_1, \nu_2 \in h_L^0$ запишутся в виде

$$\nu_1^+(t) - i\nu_1^-(t) = F_1(t) \equiv 2e^{-i\pi/4}(Q^-(t) + Q^+(t)), \tag{9}$$

$$\nu_2^+(t) + i\nu_2^-(t) = F_2(t) \equiv 2e^{-i\pi/4}(Q^-(t) - Q^+(t)). \tag{10}$$

Очевидно, что функции ν_1, ν_2 должны удовлетворять условиям $\nu_s(0) = \nu_s(\infty) = 0$, $s = 1, 2$. Рассмотрим соответствующие однородные задачи. Для них граничные условия на L имеют вид

$$\nu_1^+(t) = i\nu_1^-(t), \quad \nu_2^+(t) = -i\nu_2^-(t).$$

В качестве частных решений этих задач выберем, как и в работе [3], следующие:

$$\nu_1(z) = \frac{1}{q_1(z)}, \quad \nu_2(z) = \frac{1}{q_2(z)},$$

где

$$q_1(z) = i e^{-i(a+3b)/8} (z - e^{ia})^{1/4} (z - e^{ib})^{3/4},$$

$$q_2(z) = i e^{-i(3a+b)/8} (z - e^{ia})^{3/4} (z - e^{ib})^{1/4}.$$

Функции $q_s(z)$ обладают следующими свойствами:

$$q_{s*}(z) = \frac{1}{z} q_s(z), \quad s = 1, 2,$$

а на дуге L эти функции могут быть представлены в виде

$$q_1^\pm(t) = e^{\mp i\pi/4} q_1(t) = e^{\mp i\pi/4} t^{1/2} R_1(t),$$

$$q_2^\pm(t) = e^{\pm i\pi/4} q_2(t) = -e^{\pm i\pi/4} t^{1/2} R_2(t),$$

где $q_s(t)$ — прямые значения [3] функций $q_s(z)$ на L :

$$q_1(t) = t^{1/2} R_1(t), \quad q_2(t) = -t^{1/2} R_2(t).$$

Кроме того,

$$R_1(t) = 2 \left| \sin \frac{\theta - a}{2} \right|^{1/4} \left| \sin \frac{\theta - b}{2} \right|^{3/4},$$

$$R_2(t) = 2 \left| \sin \frac{\theta - a}{2} \right|^{3/4} \left| \sin \frac{\theta - b}{2} \right|^{1/4}.$$

Поэтому

$$\overline{q_1^+(t)} = \frac{i}{t} q_1^+(t), \quad \overline{q_2^+(t)} = -\frac{i}{t} q_2^+(t);$$

$$\overline{q_s(t)} = \frac{1}{t} q_s(t), \quad s = 1, 2.$$

Построим теперь решение неоднородных задач сопряжения для функций $\nu_1(z), \nu_2(z) \in h_L^0$ с граничными условиями (9), (10). Как показано в работе [3], эти задачи всегда разрешимы и их решения имеют вид

$$\nu_s(z) = \frac{1}{2\pi i q_s(z)} \int_L \frac{1}{t-z} F_s(t) q_s^+(t) dt + \frac{C_s}{q_s(z)}, \quad s = 1, 2,$$

где C_s — произвольные комплексные константы. Их можно определить из условий $\nu_s(0) = 0$:

$$C_s = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_s(t) q_s^+(t)}{t} dt, \quad s = 1, 2.$$

С учетом этого $\nu_s(z)$ принимают вид

$$\nu_s(z) = \frac{1}{2\pi i q_s(z)} \int_L F_s(t) q_s^+(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right] dt, \quad s = 1, 2.$$

Вычисляя $\varphi_s(z)$ по формулам (8), найдем решение задачи \mathcal{S} . Решение задачи \mathcal{R} выражается через решение задачи \mathcal{S} и имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} [\varphi_1(z) + \varphi_{2*}(z)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-i\pi/4}}{4} [\nu_1(z) - \nu_2(z) + \nu_{1*}(z) + \nu_{2*}(z)] = \\
 &= \frac{e^{-i\pi/4}}{4\pi i} \left(\frac{z}{q_1(z)} \int_L \frac{F_1(t)q_1^+(t)}{t-z} \frac{dt}{t} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{z}{q_2(z)} \int_L \frac{F_2(t)q_2^+(t)}{t-z} \frac{dt}{t} \right).
 \end{aligned}$$

Введем обозначения $f_1(t) = [Q^-(t) + Q^+(t)]$, $f_2(t) = [Q^-(t) - Q^+(t)]$, тогда $F_s(t) = 2 e^{-i\pi/4} f_s(t)$. Представим $\Phi(z)$ в виде

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{-iz}{q_1(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t)q_1(t)}{t} \frac{dt}{t-z} + \\
 &+ \frac{iz}{q_2(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_2(t)q_2(t)}{t} \frac{dt}{t-z}.
 \end{aligned}$$

Введем функцию $\mu(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, определенную на дуге L . Используя формулы Сохоцкого-Племеля, а также установленные ранее соотношения $q_s^-(t_0) = (-1)^{s+1} i q_s^+(t_0)$, $s = 1, 2$, имеем:

$$\begin{aligned}
 \mu(t_0) &= \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \\
 &= \frac{-1-i}{2} f_1(t_0) + \frac{-1+i}{2} f_2(t_0) + \\
 &+ (-1-i)K_1(t_0) + (1-i)K_2(t_0),
 \end{aligned}$$

где введены вещественные функции

$$\begin{aligned}
 K_s(t_0) &= \frac{t_0}{2\pi q_s^+(t_0)} \int_L \frac{f_s(t)q_s^+(t)}{t-t_0} \frac{dt}{t} = \\
 &= \frac{1}{4\pi R_s(t_0)} \int_L \frac{f_s(t)R_s(t)}{\sin \frac{\theta-\theta_0}{2}} d\theta,
 \end{aligned}$$

$$t = e^{i\theta}, \quad t_0 = e^{i\theta_0} \in L, \quad s = 1, 2.$$

Вещественная и мнимая части функции $\mu(t_0)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \mu(t_0) &= -Q^-(t_0) - \frac{1}{4\pi R_1(t_0)} \int_L f_1(t)R_1(t) \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta-\theta_0}{2}} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi R_2(t_0)} \int_L f_2(t)R_2(t) \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta-\theta_0}{2}}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \mu(t_0) &= -Q^+(t_0) - \frac{1}{4\pi R_1(t_0)} \int_L f_1(t)R_1(t) \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta-\theta_0}{2}} - \\
 &- \frac{1}{4\pi R_2(t_0)} \int_L f_2(t)R_2(t) \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta-\theta_0}{2}}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Чтобы построить решение, представим функцию $\Phi(z)/z$ интегралом типа Коши (так как она аналитична вне L и обращается в нуль на бесконечности):

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \Psi_z(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t)}{t} \frac{dt}{t-z}.$$

Интегрируя это соотношение по z , получим

$$\Psi(z) = u(x) + iv(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \mu(t) \ln(z-t) d\theta + c,$$

где c — комплексная константа, $t = e^{i\theta}$. Отсюда

$$u(x) = \operatorname{Re} \Psi(x) = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^b [-\operatorname{Re} \mu(t) \ln r(z, t) + \operatorname{Im} \mu(t) \omega(z, t)] d\theta + c_0,$$

где $r(z, t) = |z-t| = \sqrt{(x_1 - \cos \theta)^2 + (x_2 - \sin \theta)^2}$, $\omega(z, t) = \arg(z-t)$, c_0 — вещественная константа. Функция $\omega(z, t)$ с точностью до $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$, определяется формулами

$$\cos \omega(z, t) = \frac{x_1 - \cos \theta}{\sqrt{(x_1 - \cos \theta)^2 + (x_2 - \sin \theta)^2}},$$

$$\sin \omega(z, t) = \frac{x_2 - \sin \theta}{\sqrt{(x_1 - \cos \theta)^2 + (x_2 - \sin \theta)^2}}.$$

Если $x \notin L$, то под $\omega(z, t)$ будем понимать любую ветвь этой функции, непрерывно изменяющуюся по θ вдоль L .

При таком определении $\omega(z, t)$ функция $u(x)$ является неоднозначной и определяется с точностью до $2\pi m \int_a^b \operatorname{Im} \mu(t) d\theta$. Поэтому для ее однозначности нужно потребовать, чтобы

$$\int_a^b \operatorname{Im} \mu(t_0) d\theta_0 = 0.$$

Кроме того, из условия ограниченности функции $u(x)$ на бесконечности (3) следует

$$\int_a^b \operatorname{Re} \mu(t_0) d\theta_0 = 0.$$

Докажем, что эти условия выполняются. Представим $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t_0)}{t_0} \frac{dt_0}{t_0-z} = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \mu(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t_0}{z}\right)^n d\theta_0.$$

Поскольку по построению $\Phi(z) = O(z^{-1})$, то

$$\int_a^b \mu(t_0) d\theta_0 = 0.$$

Наконец, $|\nabla u| = |\Psi_z| = \left| \frac{\Phi(z)}{z} \right| = O(z^{-2})$. Итак, функция $u(x)$ является гармонической и удовлетворяет граничным условиям (1), (2) по построению. Кроме того, как только что доказано, $u(x)$ однозначна и удовлетворяет условиям на бесконечности (3).

Для определения константы c_0 воспользуемся условием (4), которое пока что не использовалось:

$$c_0 = \hat{Q}^+(e^{ia}) + \frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Re} \mu(t) \ln r(e^{ia}, t) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Im} \mu(t) \omega(e^{ia}, t) d\theta. \quad (14)$$

Приведенные рассуждения резюмирует следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи \mathcal{K} существует и дается формулой (13), в которой функции $\operatorname{Re} \mu(t)$, $\operatorname{Im} \mu(t)$ берутся из (11), (12), а вещественная константа c_0 — из (14).*

Замечание. Функция

$$v(x) = \operatorname{Im} \Psi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b [\operatorname{Im} \mu(t) \ln r(z, t) + \operatorname{Re} \mu(t) \omega(z, t)] d\theta + c_1 \quad (15)$$

по построению связана с $u(x)$ соотношениями Коши–Римана $\partial u / \partial r = \partial v / \partial \theta$, $\partial u / \partial \theta = -\partial v / \partial r$. Легко видеть, что функция $v(x)$ однозначна, гармоническая и ограниченная на бесконечности. Поэтому задача \mathcal{K} для функции $v(x)$, в которой условие (1) заменено на условие $\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{L^+} = -Q^+(t) \in C^{0,\lambda}(\bar{L})$, а (2) — на условие $v \Big|_{L^-} = \hat{Q}^-(t) \in C^{1,\lambda}(\bar{L})$, имеет решением функцию (15), где $c_1 = \hat{Q}^-(e^{ia}) + (1/2\pi) \int_L [\operatorname{Im} \mu(t) \ln r(e^{ia}, t) + \operatorname{Re} \mu(t) \omega(e^{ia}, t)] d\theta$, $Q^-(t) \equiv \partial \hat{Q}^-(t) / \partial \theta$.

Литература

1. Крутицкий П.А. // Матем. моделирование. 1990. 2, № 4. С. 143.
2. Крутицкий П.А. // Матем. моделирование. 1990. 2, № 9. С. 114.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию
28.04.00

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.17

ОБРАЗОВАНИЕ ЛЕГКИХ β^+ -РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ ВОЛЬФРАМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИНТЕНСИВНЫХ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ

С. С. Бородина, Б. С. Ишханов, В. И. Мокеев, С. И. Павлов

(НИИЯФ)

Исследована динамика образования легких β^+ -радиоактивных изотопов вольфрама под действием пучков тормозного излучения различной интенсивности с энергией фотонов, отвечающих возбуждению дипольного гигантского резонанса. Предложена гипотеза о возможности образования наиболее легких стабильных изотопов элементов под действием высокоинтенсивных потоков γ -квантов.

Введение

Исследование трансмутации атомных ядер под действием потоков γ -квантов высокой интенсивности важно для решения многих фундаментальных и прикладных задач, таких, как объяснение синтеза элементов во Вселенной; исследование свойств атомных ядер вдали от полосы β -стабильности; разрушение долгоживущих составляющих радиоактивных отходов, образующихся при работе ядерных реакторов и в атомной промышленности; введение примесей в полупроводниковые материалы и др.

Характерная особенность ядерных процессов, идущих под действием интенсивных потоков γ -квантов, состоит в том, что в результате реакций (γ, n) , $(\gamma, 2n)$ и (γ, p) образуется большое число различных стабильных и радиоактивных изотопов, которые распадаются и разрушаются под действием пучка фотонов и образуют трансмутационную цепочку изотопов [1–4].

Цель настоящей работы — исследование динамики образования легких радиоактивных изотопов вольфрама W ($Z = 74$) под действием фотонных пучков.