

$U(z)$ градиентного плотностного потока с внутренней волной при развитии ветра (см. рис. 1).

Выражение (6) с учетом (3) позволяет оценить воздействие на скорость течения $U_m = U(z_m)$ каждого из основных факторов, определяющих развитие потока: градиента давления за счет стока через водохранилище (первое слагаемое справа в (6)), влияния ветра (второе слагаемое) и эффектов стратификации (третье слагаемое). Такая оценка, по данным прямых измерений $U(z, t)$, $T(z, t)$ и $U_w(t)$, показала, что в среднем за время серии зондирований значения U_* и U_m определяются на 50% стоковым градиентом давления, на 26% влиянием ветра и на 24% эффектами стратификации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-05-64045) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант 990981).

Литература

1. *Самолобов Б.И.* Придонные стратифицированные течения. М.: Научный мир, 1999.

2. *Эдельштейн К.К.* Водохранилища России. Экологические проблемы, пути их решения. М.: ГЕОС, 1998.
3. *Albrecht A., Goudsmit G., Zeh M.* // *Limnology and Oceanography*. 1999. **44**. P. 196.
4. *Самолобов Б.И., Слеув М.В., Замарашкин А.Л., Шильнев А.В.* // *Физическая экология*. 1999. М.: Физический ф-т МГУ, 1999. № 5. С. 81.
5. *Ривьер И.К., Литвинов А.С.* // *Водные ресурсы*. 1997. **24**, № 5. С. 590.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
7. *Fukushima Y., Parker G., Pantin H.* // *Mar. Geol.* 1985. **67**, No. 1–2. P. 55.
8. *Анисимова Е.П., Петров В.В., Сперанская А.А., Шитов М.В.* // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1992. № 5. С. 63 (*Moscow University Phys. Bull.* 1992. No. 5. P. 57).

Поступила в редакцию
31.03.00

УДК 551.463:532.6

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОВЕРХНОСТНОМ МИКРОСЛОЕ ОКЕАНА

В. Б. Лапшин*), Е. В. Караваева, А. А. Будников

(кафедра физики атмосферы)

Методом энергетического анализа исследована гравитационно-капиллярная устойчивость горизонтального слоя жидкости по отношению к возмущениям. На основе теоретических расчетов и экспериментальных данных определена критическая толщина слоя морской воды, при которой сопоставимы энергии конвекций Рэлея и Марангони.

Введение

Устойчивость решений уравнений Навье–Стокса можно исследовать с помощью энергетического или спектрального анализа. Цель обоих методов — определение различных режимов течений путем вычисления безразмерных критических чисел.

Безразмерные числа являются масштабными множителями, входящими в уравнения переноса и граничные условия. Они могут быть использованы при сопоставлении сил, действующих в жидкости (например, число Марангони определяет соотношение капиллярных сил и сил вязкости; число Рэлея — соотношение сил плавучести и сил вязкости), при определении критериев потери гидродинамической устойчивости.

Иногда, например в задаче Бинара, для определения условия неустойчивости достаточно использовать критерии, полученные на основе спектральной теории [1]. Однако в спектральной теории рассматриваются бесконечно малые возмущения, для которых применимы линеаризованные уравнения. Если

возмущения имеют конечную величину, такие критерии могут не выполняться.

В случае, когда размер возмущений не является бесконечно малым, используются методы энергетической теории, дающие критерии, достаточные для определения безусловной устойчивости основного течения. Энергетическая теория обычно исследует эволюцию энергии возмущения путем анализа соответствующего функционала. Иногда возможно подобрать положительно определенные функционалы, примером которых является функция Ляпунова. Такие функционалы позволяют расширить область значений критических чисел, гарантирующих безусловную устойчивость [1].

В настоящей работе приведены результаты экспериментальных исследований физических параметров, определяющих числа Марангони и Рэлея, для реального поверхностного микрослоя океана. На основе эксперимента выполнена оценка критического числа Марангони. Полученные величины сопоставлены с теоретическими значениями критических чисел Рэлея и Марангони.

*) Государственный океанографический институт, Москва.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения бесконечного слоя толщиной d вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с плотностью ρ , вязкостью $\mu = \nu\rho$, коэффициентом термического расширения γ и коэффициентом термодиффузии k . Ускорение свободного падения равно g . Пространство над жидкостью будем считать заполненным нейтральным газом с пренебрежимо малыми вязкостью и плотностью. Направим ось z вертикально вверх. Пусть нижняя граница слоя находится на твердой поверхности, температура которой задана, а разность температур на нижней и верхней границах равна ΔT . Мы будем пользоваться приближением Буссинеска. Положение верхней границы будем записывать как $S(t)$: $z = 1 + \eta(x, t)$, где η — величина отклонения верхней границы от положения равновесия.

Возмущения параметров, определяющих основное состояние такой системы, в безразмерном виде удовлетворяют следующим уравнениям [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \text{Ra} \theta k_i, \\ &(k_i = (0, 1)), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= \nabla^2 \theta + w, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где v — возмущение скорости, θ — возмущение температуры, w — вертикальная составляющая скорости возмущения, τ_{ij} — тензор напряжений (здесь и далее нижний индекс подразумевает проекцию соответствующей величины на оси координат x и z , причем по повторяющимся индексам производится суммирование), $\text{Pr} = \nu/k$ — число Прандтля, $\text{Ra} = \gamma \Delta T g d^3 / (\nu k)$ — число Рэлея.

Граничные условия имеют вид

на поверхности (при $z = 1 + \eta$):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= \frac{1}{C} [K(\eta)(\sigma(\theta) + \text{Ma} C \eta) - \\ &- B(\eta + \alpha \Delta T \eta^2)] n_i - \text{Ma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) t_k t_i, \\ \eta_t &= N v_i n_i, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i &= \frac{1 - N}{N}, \end{aligned} \tag{2}$$

на дне (при $z = 0$):

$$v_i = \theta = 0,$$

где $K(\eta) = \frac{1}{N^3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, $N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2}$, а $n_i \equiv \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) \frac{1}{N}$ и $t_i \equiv \left(1, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{1}{N}$ — нормальный и

тангенциальный по отношению к поверхности жидкости единичные векторы соответственно, $\sigma(\theta)$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $\text{Ma} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \Delta T d / \mu k$ — число Марангони, $C = \mu k / (\sigma_0 d)$ — капиллярное число, $B = \rho g d^2 / \sigma_0$ — число Бонда, σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности.

Решение задачи на основе спектральной теории

Линеаризуя уравнения (1), (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \text{Ra} \theta k_i, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \nabla^2 \theta + w, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \\ &\text{при } z = 0 : \\ v_i = \theta &= 0, \\ &\text{при } z = 1 : \\ C \tau_{ij} n_j n_i &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - B \eta, \\ \tau_{ij} n_j t_i &= -\text{Ma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) t_i, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= v_i n_i, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Разлагая параметры системы по малому параметру C , который для океана имеет порядок 10^{-7} , из (3) получим $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - B \eta = 0$, и, следовательно, $\eta \equiv 0$.

Используя этот результат, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sqrt{\text{Ra}} \varphi k_i &= 0, \\ \nabla^2 \varphi + \sqrt{\text{Ra}} w &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \\ &\text{при } z = 0 : \\ v_i = \varphi &= 0, \\ &\text{при } z = 1 : \\ \sigma_{ij} n_j t_i + \frac{\text{Ma}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ w &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где введено обозначение $\varphi \equiv \sqrt{\text{Ra}} \lambda \theta$.

Решение задачи на основе энергетической теории

Энергетический функционал типа Ляпунова для задачи (1), (2) имеет вид [3]

$$E = \left\langle \frac{1}{2} \text{Pr}^{-1} u_i u_i \right\rangle + \lambda_1 \left\langle \frac{\theta^2}{2} \right\rangle + \lambda_2 \int_0^{S(t)} \frac{1}{2} \left(\eta^2 + \frac{\gamma \Delta T \eta^3}{3} \right) \frac{1}{N} dS,$$

где использовано обозначение $\langle \dots \rangle = \int_0^{x_0} \int_0^{1+\eta(x,t)} \dots dz dx$ (заметим, что $\int_0^{S(t)} \dots dS = \int_0^{x_0} \dots N dx$, где x_0 — период возмущения), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ — параметры связи. Параметры связи произвольны и выбираются так, чтобы расширить область устойчивости.

Достаточное условие устойчивости решений системы (1), (2) дает вариационное уравнение $\delta \left(\frac{dE}{dt} + \left\langle 2p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle + \beta \int_x \eta dx \right) = 0$, где $2p$ и β — множители Лагранжа.

Выполняя разложение по малому параметру C , получаем:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \sqrt{\text{Ra}^{(0)}} \varphi^{(0)} k_i = 0,$$

$$\nabla^2 \varphi^{(0)} + \sqrt{\text{Ra}^{(0)}} w^{(0)} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0,$$

при $z = 0$:

$$v_i^{(0)} = \varphi^{(0)} = 0, \quad (5)$$

при $z = 1$:

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial z} = \frac{1}{2} \text{Ma} \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}^{(0)}} \lambda^{(0)}} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \text{Ma} \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}^{(0)}} \lambda^{(0)}} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x},$$

$$\sqrt{\text{Ra}^{(0)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Ra}^{(0)}} \left(\lambda^{(0)} + \frac{1}{\lambda^{(0)}} \right),$$

где индексом (0) обозначены величины при нулевой степени C .

Решения уравнений (4) и (5) находились путем представления физических величин p , v , w и θ в виде $f_i(z) \exp(i\alpha x)$. Полученная затем система дифференциальных уравнений решалась методом Гаусса.

Зависимости критических чисел от волнового числа α представлены на рис. 1. Наименьшая область

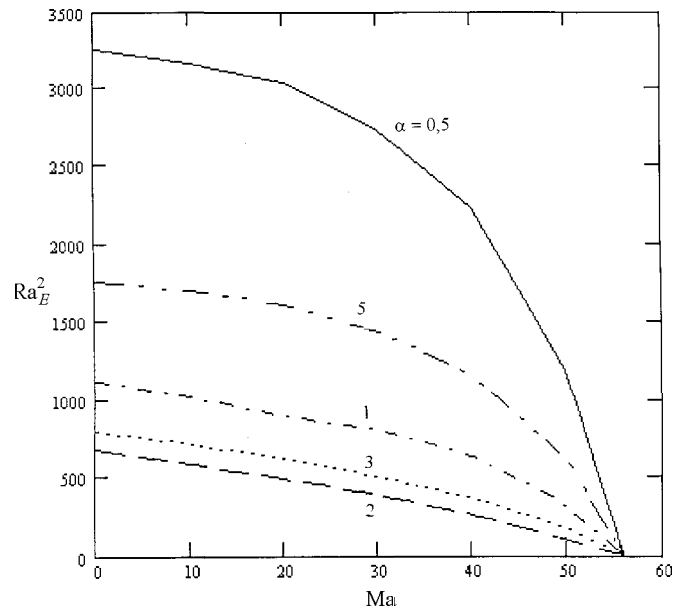


Рис. 1. Критические числа, рассчитанные на основе энергетической теории, при различных значениях волнового числа α

гарантированной устойчивости соответствует волновому числу $\alpha \approx 2$. При глубине слоя $d = 1$ см значение $\alpha \approx 2$ соответствует длине волны возмущения $\Lambda = \pi d \approx 3$ см. Другими словами, критический размер возникающих конвективных ячеек в сантиметровом слое жидкости равен 3 см.

Экспериментальные результаты

В природных условиях величина поверхностного натяжения σ , а следовательно, и величина $\partial \sigma / \partial T$ имеют достаточно сложную зависимость от температуры [4]. Для уточнения этой зависимости в лабораторных условиях были проведены измерения поверхностного натяжения морской воды, в которую была добавлена сине-зеленая микроводоросль *Platymonius viridis*. Измерения проводились на весах Ленгмюра улиточного типа в диапазоне температур $10 \div 35$ °С. Как натурные [4], так и лабораторные измерения показывают, что существует диапазон температур, при котором наблюдается рост числа Марангони. По данным натурных наблюдений это диапазон $24 \div 28$ °С, по данным лабораторных измерений — диапазон $19 \div 25$ °С. В таблице приводятся типичные для морских условий безразмерные числа, полученные в результате расчетов по справочным данным и натурным измерениям [4].

Безразмерные числа при температуре воды $T = 20$ °С и солености $S = 35$ ‰

Pr	7
Ra	$1,9 \cdot 10^4$
B	1300
Ma	$1,3 \cdot 10^6 \div 1,2 \cdot 10^{5*})$ $2,01 \cdot 10^6 \div -1 \cdot 10^{6**})$
C	$2 \cdot 10^{-7}$

*) Натурные измерения.

***) Лабораторные измерения.

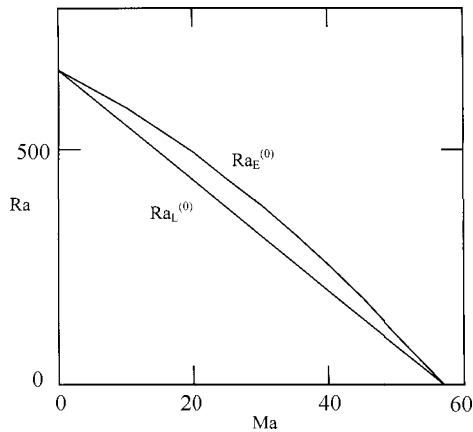


Рис. 2. Границы устойчивости для горизонтального слоя жидкости, определенные с применением спектральной ($Ra_L^{(0)}$) и энергетической ($Ra_E^{(0)}$) теорий в нулевом приближении. Выше нейтральной кривой — область устойчивости, ниже — область неустойчивости

Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов

Решения систем уравнений (4) и (5) представлены графически на рис. 2. Выше нейтральных кривых находится область устойчивости, ниже — область неустойчивости.

На основе зависимости $Ra_E^{(0)}$ (Ma) можно оценить критическую толщину слоя морской воды, в котором сопоставимы энергии конвекций Рэля и Марангони.

Зависимость $Ra_E^{(0)}$ (Ma) можно представить в линеаризованном виде, совпадающем с видом $Ra_L^{(0)}$ (Ma) (см. рис. 2): $\frac{Ra}{Ra_c} + \frac{Ma}{Ma_c} = 1$, где $Ra_c \equiv Ra$ при $Ma = 0$, $Ma_c \equiv Ma$ при $Ra = 0$. Из полученных кривых следует: $Ra_c = 669$, $Ma_c = 57$. Подставляя в эту зависимость выражения для чисел Рэля и Марангони, получим критическую толщину слоя, в котором сопоставимы энергии конвекций Рэля и Марангони:

$$h_c = \sqrt{\frac{|\partial\sigma/\partial T|}{\gamma g \rho} \frac{Ra_c}{Ma_c}}$$

На рис. 3 построены зависимости h_c от температуры для чистой воды, по данным натурных [4] и лабораторных измерений.

Для чистой воды величина $h_c = 2,4$ см является постоянной. При наличии на поверхности воды поверхностно-активной пленки из органических веществ критическая толщина слоя возрастает, достигая при некоторых температурах 4 см. В лабораторных условиях концентрация микроводоросли была значительно выше, чем в естественных условиях, и критическая толщина достигала 10 см.

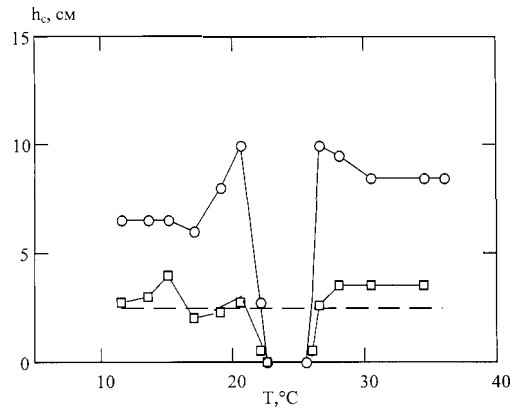


Рис. 3. Зависимости критической толщины h_c от температуры для чистой воды (пунктирная линия), по данным натурных (\square) и на основе лабораторных (\circ) измерений. Погрешность измерений T и h_c составляет соответственно $\pm 0,5^\circ\text{C}$ и $\pm 0,5$ см (коэффициент доверия 0,9)

Большие значения h_c могут быть объяснены тем, что в исходной модели не учитывались вязкость поверхностно-активной пленки, значительно уменьшающей интенсивность конвекции Марангони.

Выводы

В работе проведено исследование гидродинамической устойчивости слоя воды относительно периодического возмущения. Для оценки безразмерных параметров модели проведена серия лабораторных измерений зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры.

С помощью методов энергетической теории, приспособленной для анализа гравитационно-капиллярной устойчивости в поверхностном микрослое океана, получены следующие результаты.

1. Найдены семейства зависимостей критического числа Рэля от числа Марангони при различных волновых числах, характеризующих период возмущения.
2. В лабораторных условиях измерена зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры для морской воды с сине-зеленой микроводорослью *Platymonus viridis* в диапазоне температур $10 \div 35^\circ\text{C}$.
3. Проведена оценка критической толщины слоя морской воды, в котором сопоставимы энергии конвекций Рэля и Марангони.

Литература

1. Джозеф Д.Д. Устойчивость движений жидкости М.: Мир, 1981.
2. Castillo J.L., Velarde M.G. // J. Fluid. Mech. 1982. **125**. P. 463.
3. Davis S.H., Homsy G.M. // J. Fluid. Mech. 1980. **98**. P. 572.
4. Ланин В.Б., Рагулин И.Г. // Метеорология и гидрология. 1992. № 5. С. 69.

Поступила в редакцию 03.04.00