

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 51:53

**ВЫЧИСЛЕНИЕ  $\beta$ -ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ  $\varphi^4$  В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ**

**В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, И. Л. Юдин**

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: belokur@rector.msu.ru

В рамках новой теории возмущений со сходящимися рядами рассматривается задача восстановления величины, заданной конечным числом членов ее пертурбативного разложения, в широком интервале значений константы связи. В качестве примеров такого рода задач рассматриваются нульмерный аналог функционального интеграла и  $\beta$ -функция модели  $g(\varphi^a\varphi^a)^2$ ,  $a = 1, 2$ , в четырехмерном пространстве-времени.

**Введение**

Как известно, используемые в квантовой физике ряды теории возмущений представляют собой асимптотические разложения по степеням некоторого параметра (константы связи) и поэтому имеют смысл лишь при достаточно малых значениях этого параметра.

В работах [1–7] был развит новый подход к суммированию расходящихся рядов и вычислению функциональных интегралов, в котором вычисляемым величинам ставятся в соответствие аппроксимирующие их с любой заданной точностью абсолютно сходящиеся ряды.

В рамках этого метода единым образом можно рассматривать случаи как малых, так и больших значений параметра разложения.

Замечательной особенностью данного метода суммирования является то, что коэф-фициенты асимптотического разложения и сама функция  $f(g)$  удовлетворяют некоторым условиям (см. ниже раздел 1), оказывается возможным восстано-вить истинное значение  $f(g)$  с высокой точностью для всех значений параметра разложения, зная лишь конечное число членов ряда традиционной теории возмущений.

Настоящая работа посвящена рассмотрению за-дачи восстановления величины, заданной конечным числом членов ее пертурбативного разложения, в широком интервале значений параметра разложения.

**1. Метод суммирования расходящихся рядов**

Рассмотрим класс знакопередающихся рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(-g)^n. \tag{1}$$

Этот класс описывается следующими тремя свойст-вами:

1. При  $n > N_0$  коэффициенты  $f_n$  удовлетворяют условию

$$f_n \sim C n! a^n n^b,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $C$  — некоторые положительные кон-станты.

2. Ряд (1) есть тейлоровское разложение функ-ции  $f(g)$  в точке  $g = 0$ . Функция  $f(g)$  непрерывно дифференцируема при  $g \geq 0$  и имеет аналитическое продолжение в правую полуплоскость ( $\text{Re } g > 0$ ). Выполнена следующая оценка равномерно по  $g \in G$ ,  $G = \{g: \text{Re } g > 0\}$ :

$$|f(g) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n g^n| < C_1^N N! N^\alpha g^N,$$

где  $\alpha$  — положительная константа.

При этих условиях функция  $f(g)$  однозначно вос-становливается по ряду (1).

3. Выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^{\infty} x^n |F(x)| dx \leq \text{const} \left| \int_0^{\infty} x^n F(x) dx \right|, \quad n \geq 0,$$

где  $F(x)$  — обобщенная функция, причем для  $f(g)$  справедливо представление

$$f(g) = \int_0^{\infty} e^{-gx} F(x) dx. \tag{2}$$

Введем функцию

$$\tilde{\varphi}_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\rho r\} \exp\{-r^{2m}\} dr, \tag{3}$$

где  $m$  — некоторое натуральное число. Введем обо-значения:

$$A_{2n}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \tilde{\varphi}(\rho) \rho^{2n} d\rho, \quad B_\alpha = \int_0^{\infty} x^\alpha F(x) dx.$$

Представим теперь экспоненту в (2) как обратное преобразование Фурье функции  $\tilde{\varphi}(\rho)$ :

$$e^{-gt} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \exp\{i\rho g^{1/2m} t^{1/2m}\} d\rho.$$

Вводя параметр обрезания  $R$  в интеграле по  $\rho$  и раскладывая экспоненту  $\exp\{-i\rho g^{1/2m} t^{1/2m}\}$ , получим вместо (2) следующий сходящийся ряд для  $f(g)$ :

$$f(g, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^{n/m} B_{n/m} A_{2n}(R). \quad (4)$$

Для больших значений  $g$  можно представить регуляризованную функцию  $f(g, R)$  в виде разложения по обратным степеням  $g$ . Такой способ разложения позволяет уменьшить число коэффициентов  $f_k$  исходного ряда теории возмущений (1), эффективно используемых для вычисления  $f(g)$ .

Произведем замену  $\rho \rightarrow g^{-1/2m} \rho$  и разложим первую экспоненту в подынтегральном выражении в (3), что даст

$$f(g, R) = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} g^{-(2n+1)/2m} E_{2n}(m, R), \quad (5)$$

где

$$E_{2n}(m, R) = \frac{1}{2\pi m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \times \\ \times \frac{2R^{2n+2k+1}}{2n+2k+1} B_{\frac{k}{m}}.$$

Функцию  $f(g)$  можно теперь с любой точностью аппроксимировать функцией  $f(g, R, N)$  — суммой  $N$  ( $N < \infty$ ) слагаемых в (4) и (5) для малых и больших значений  $g$  соответственно.

Коэффициенты  $B_{k/m}$  с целыми индексами  $k/m = n$  представляют собой коэффициенты  $f_n$  исходного ряда (1). Вычисление коэффициентов с дробными индексами — это самостоятельная задача в рамках данного метода. Наиболее простым способом ее решения является интерполяция функции  $B(\alpha) \equiv B_{\alpha}$  на нецелые значения аргумента. Более точный метод определения  $B_{k/m}$  был предложен в работе [5] для случая  $m = 4$ . В рамках этого метода коэффициенты  $B_{\alpha}$  с нецелыми  $\alpha$  находятся как решения системы приближенных нелинейных алгебраических уравнений

$$B_{(n-1)/4}^{9/16} B_{n/4}^{9/16} B_{(n-2)/4}^{-1/16} B_{(n+2)/4}^{-1/16} \approx \\ \approx \frac{(-1)^n 2(2n-1)!}{\pi} \sum_{k=0}^{4N-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{a^{2k-2n+1}}{2k-2n+1} B_{k/4}, \quad (6)$$

где  $a$  — свободный параметр, выбираемый из условий минимизации ошибки решения (6).

Получить значения параметра  $R$  можно, воспользовавшись следующими соображениями. Как следует из общей идеи метода, при фиксированном  $g$  и  $R, N \rightarrow \infty$  регуляризованная конечная сумма  $f(g, R, N)$  стремится к  $f(g)$ . Если зафиксировать  $N$ , то, поскольку  $f(g, R, N)$  является полиномом по  $R$  степени  $4mN + 1$ , при некоторых  $\varepsilon = \varepsilon(g, N)$  на интервале  $\Delta_{\varepsilon}$  значений  $R$  функция  $f(g, R, N)$  будет аппроксимировать  $f(g)$  с точностью, не меньшей  $\varepsilon$ . Как показывает анализ, при  $N = 4$  или  $5$  и  $0 \leq g \leq 20$  существует интервал  $\Delta_{\varepsilon}$  такой, что относительная ошибка приближения не превосходит  $0,1$ . В качестве приближенного значения функции  $f(g)$  можно взять следующую величину:

$$\bar{f}(g) = (1/2) \left| \max_{\Delta_{\varepsilon}} f(g, R, N) + \min_{\Delta_{\varepsilon}} f(g, R, N) \right|.$$

Возникающая при этом ошибка составляет, очевидно,

$$\delta f = (1/2) \left| \max_{\Delta_{\varepsilon}} f(g, R, N) - \min_{\Delta_{\varepsilon}} f(g, R, N) \right|.$$

Данный способ определения параметра  $R$  применим в равной степени и при малых и при больших  $g$ .

## 2. Примеры вычислений

**1. Нульмерный аналог функционального интеграла.** Рассмотрим нульмерный аналог функционального интеграла, возникающего в квантовой теории поля с потенциалом взаимодействия  $\lambda\varphi^4$ :

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2 - gx^4\} dx = \\ = \exp\left\{\frac{1}{8g}\right\} K_{1/4}\left(\frac{1}{8g}\right) \frac{1}{\sqrt{4g}},$$

где  $K_{1/4}$  — функция Макдональда. Соответствующий асимптотический ряд расходится:

$$I(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-g)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{4k}} \frac{(4k)!}{(2k)!}. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае коэффициенты  $B_{k/m}$ , фигурирующие в (4) и (5), могут быть вычислены аналитически:

$$B_{k/m} = \Gamma\left(\frac{4k+2}{2m}\right).$$

Воспользовавшись этим фактом, мы провели сравнение точных значений  $B_{k/4}$  и приближенных  $\tilde{B}_{k/4}$ , рассчитанных с помощью метода, описанного в работе [5], — решения системы приближенных нелинейных алгебраических уравнений (6). Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

$k$	$B_{k/4}$	$\tilde{B}_{k/4}$	$\frac{ B_{k/4} - \tilde{B}_{k/4} }{B_{k/4}}$
5	2	1.957	0.0214
6	3.323	3.281	0.01269
7	6	5.89	0.0184
9	24	24.494	0.0206
10	52.343	54.175	0.035
11	120	123.804	0.03817
13	720	693.432	0.0369

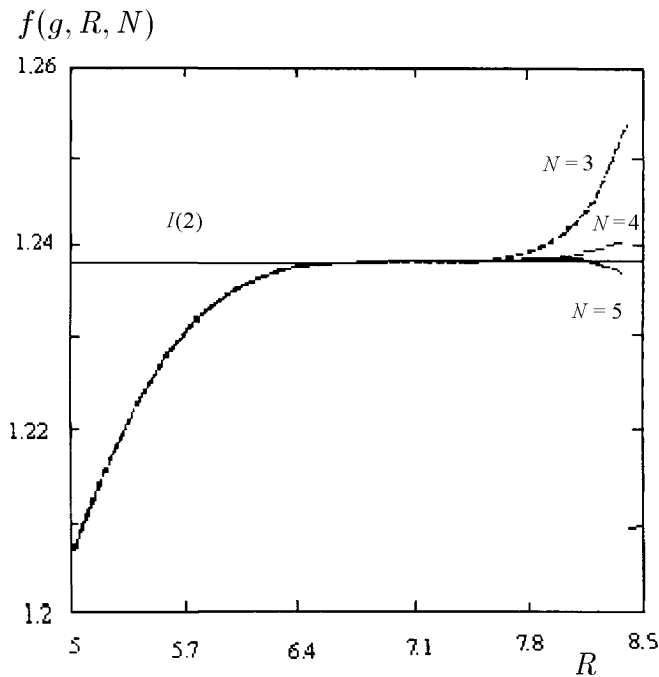


Рис. 1

На рис. 1 приведена типичная зависимость полинома  $f(g, R, N)$  от  $R$  при фиксированном значении константы связи  $g = 2$  и при различных значениях  $N$  — числа «известных» членов ряда традиционной теории возмущений (7), причем при расчетах использовались точные значения коэффициентов  $B_\alpha$ . Как и следовало ожидать, с ростом  $N$  область значений  $R$ , при которых  $f(g, R, N)$  хорошо аппроксимирует функцию  $f(g)$ , увеличивается.

Результат сравнения точных значений интеграла и приближенных, полученных описанным выше методом, в области  $0 < g \leq 10$  приведен на рис. 2. При этом значения параметра  $R$  определялись так, как это было изложено в предыдущем разделе, значения  $m$  и  $N$  полагались равными соответственно 4 и 5, а в качестве коэффициентов  $B_{k/4}$  использовались их приближенные значения  $\tilde{B}_{k/4}$ . Во всей рассмотренной области значений  $g$  погрешность полученного приближения не превосходит 0.01. Для расчета в области  $0 < g \leq 1$  использовалась формула (4), в области  $1 < g \leq 10$  — формула (5). Значения аппроксиманты  $f(g, R, N)$ , вычисленные в точке  $g = 1$  по формулам (4) и (5), практически совпадают. Это

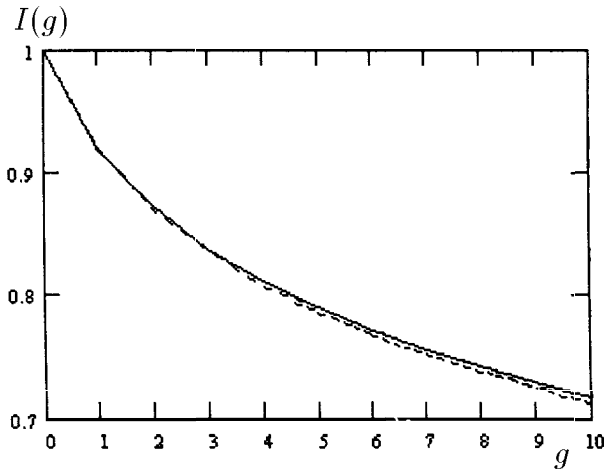


Рис. 2

является следствием того факта, что (5) есть не что иное, как другой формат разложения исходной формулы (4); при этом, разумеется, применение изложенного выше метода нахождения параметра  $R$  в случаях формул (4) и (5) приводит к разным значениям.

**2. Вычисление  $\beta$ -функции модели  $g(\varphi^\alpha \varphi^\alpha)^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ , в 4-мерном пространстве-времени.** Как известно [8, 9], первые пять членов ряда для  $\beta$ -функции модели  $g(\varphi^\alpha \varphi^\alpha)^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ , вычисленные в  $MS$ -схеме, имеют вид

$$\beta^{MS}(g) \cong \frac{5}{3}g^2 - \frac{10}{3}g^3 + 20.043g^4 - 175.257g^5 + 1922.33g^6. \quad (8)$$

Применим метод к функции  $f(g) = \exp\{-\beta(g)/g\}$ . Раскладывая  $f(g)$  в ряд и оставляя первые шесть членов, отвечающие известным членам ряда для  $\beta$ -функции, будем иметь:

$$f(g) = 1 - 1.6667g + 4.7222g^2 - 26.3705g^3 + 219.17g^4 - 2321.02g^5.$$

В табл. 2 приведены коэффициенты  $B_{k/4}$ , полученные путем решения системы (6).

Таблица 2

$\alpha$	$B_\alpha$	$\alpha$	$B_\alpha$	$\alpha$	$B_\alpha$
1/4	1.0	7/4	5.445	14/4	858.3
2/4	1.1	9/4	17.532	15/4	2097.9
3/4	1.31	10/4	34.609	17/4	13526
5/4	2.273	11/4	72.21	18/4	36010
6/4	3.380	12/4	361.8	19/4	98800

Результат вычисления  $\beta$ -функции для  $0 \leq g \leq 20$  представлен на рис. 3. Относительная погрешность для всех значений  $g$  не превосходит 0.1. В рассмотренном интервале значений константы связи величина  $\beta(g)$  возрастает, как  $g^{1.36}$ . Подчеркнем, что в рамках настоящего подхода получаемая для вычисляемой величины погрешность есть абсолютная погрешность, т. е. с учетом указанной выше точности

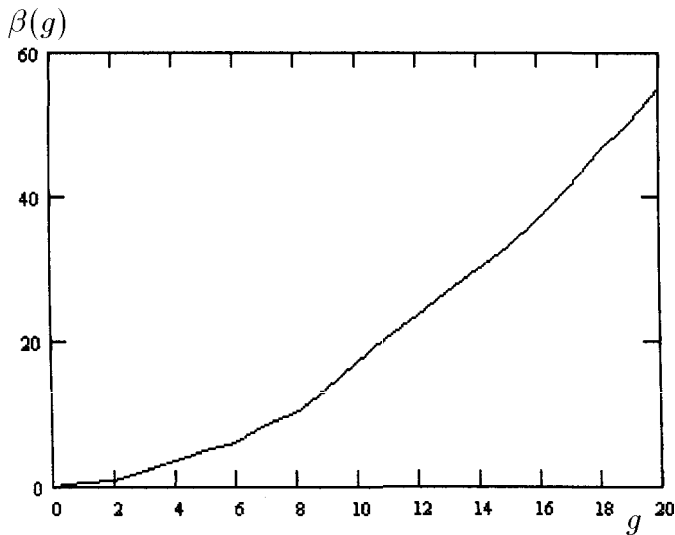


Рис. 3

кривая, представленная на рис. 3, есть кривая, которая могла бы быть получена суммированием ряда (8) с учетом всех его коэффициентов.

УДК 538.9

## КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

Е. Р. Алабердин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: zhreal@imail.ru

Исследуются спиновые возбуждения в системе многих частиц (электронов) с сильным короткодействующим обменным взаимодействием между ними. Для решения задачи предлагается перейти от операторов спиновой плотности электронов к новым операторам, описывающим рождение и уничтожение спиновых возбуждений. Диагонализация полученного при этом приближенного гамильтониана сводится к решению секулярного уравнения, характеризующего спектр спиновых возбуждений в системе. Получено решение этого уравнения для малых значений импульса.

Особенностью ВТСП-материалов является наличие сильного (короткодействующего) обменного взаимодействия между электронами проводимости. Известно [1], что электрон-фононное взаимодействие может эффективно усиливаться при наличии флуктуаций электронных спинов.

Начальным этапом может быть исследование коллективных возбуждений в спиновых системах. Характерной моделью спиновых систем может служить система многих частиц (электронов) с сильным короткодействующим обменным взаимодействием между ними.

Для исследования этой модели в настоящей работе предлагается перейти от операторов спиновой плотности электронов к новым операторам, описывающим рождение и уничтожение спиновых возбуждений. Такое преобразование позволяет при определенном «повороте» операторов спиновой плотности приближенно считать новые операторы бозе-операторами. «Поворот» спиновых операторов осуществляется при помощи обобщенного канонического

### Литература

1. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Solovyev Yu.P. // Mod. Phys. Lett. 1995. **A10**, No. 39. P. 3033.
2. Belokurov V.V., Kamchatny V.V., Shavgulidze E.T., Solovyev Yu.P. // Mod. Phys. Lett. 1997. **A12**, No. 10. P. 661.
3. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // ТМФ. 1996. **109**. С. 51.
4. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Фундамент. и прикл. матем. 1997. **3**, № 3. С. 693.
5. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Фундамент. и прикл. матем. 1999. **5**, № 2. С. 363.
6. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Успехи матем. наук. 1997. **52**, № 2. С. 153.
7. Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. // Успехи матем. наук. 1999. **53**, № 3. С. 153.
8. Kazakov D.I. // Phys. Lett. 1983. **B133**. P. 406.
9. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachev F.V. // Phys. Lett. 1983. **B132**. P. 351.

Поступила в редакцию  
14.06.00

преобразования. Угол «поворота» выбирается таким образом, чтобы при усреднении по квантовым состояниям функционал свободной энергии достигал минимума. В этом случае задача получения спектра спиновых возбуждений упрощается и сводится к диагонализации квадратичной по новым операторам части гамильтониана спиновой системы в первом порядке теории возмущений.

Гамильтониан исследуемой модели:

$$H = \int d\mathbf{r} \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \left( \frac{p^2}{2m_e} - \mu \right) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' J(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \times \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \tau_{\alpha\gamma}^{\nu} \psi_{\gamma}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha'}^{+}(\mathbf{r}') \tau_{\alpha'\gamma'}^{\nu} \psi_{\gamma'}(\mathbf{r}'). \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал системы;  $\psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r})$ ,  $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$  — операторы рождения и уничтожения электронов;  $\tau^{\nu}$  — матрицы Паули,  $\nu = 1, 2, 3$  (крестиком обозначен комплексно сопряженный оператор).