УДК 530.145

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МАГНИТНОГО И ХРОМОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

В. Ч. Жуковский, В. В. Худяков, А. С. Разумовский

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Рассмотрен вклад в поляризацию вакуума кварков, взаимодействующих с интерферирующими электромагнитным и неабелевым фоновым калибровочным полями в $SU(3)$ модели квантовой хромодинамики. Для случая интерференции магнитного поля H и хромомагнитного поля B в однопетлевом приближении вычислен эффективный лагранжиан, являющийся обобщением лагранжиана Гейзенберга–Эйлера квантовой электродинамики и точно учитывающий вклад полей H и B.

Введение

В последнее время большое число работ посвящается исследованию вакуума и вакуумных эффектов в различных моделях квантовых неабелевых полей. Однако, несмотря на все усилия продвинуться в этом направлении, точные результаты возможно получить лишь в ограниченном числе задач. В большинстве случаев результат получается в виде разложения в ряд по какому-либо малому параметру теории, и лишь иногда удается вычислить непертурбативные слагаемые. В результате до сих пор структура вакуума калибровочных моделей остается далеко не ясной. Предложены различные модели вакуума, которые позволяют получить некоторое представление о его строении и с той или иной точностью оценить величины физических эффектов, связанных с его нетривиальной природой. Так, одной из наиболее характерных черт вакуума КХД является наличие в нем длинноволновых случайных флуктуаций глюонного поля. Эти особенности легли в основу стохастической модели вакуума, рассмотренной, например, в работе [1]. Настоящая статья посвящена дальнейшему изучению структуры вакуума с использованием модели постоянного фонового поля, которая позволяет описать некоторые наиболее характерные особенности вакуума, связанные с его непертурбативной природой.

В настоящей статье вначале приводится и анализируется полученный в работе [2] (см. также [3]) эффективный лагранжиан рассматриваемой модели интерферирующих абелева и неабелева полей, записанный в виде интегрального представления как функция инвариантов электромагнитного и глюонного полей. Далее в однопетлевом приближении определяется точное выражение для эффективного лагранжиана типа Гейзенберга–Эйлера для случая интерференции абелева магнитного поля H и хромомагнитного поля B цветовой группы $SU(3)$. Затем исследуется возможность разложения полученного результата в ряд по степеням малого параметра, пропорционального обратной величине напряженности фонового хромомагнитного поля, и оценивается величина интерференционного вклада в эффективный лагранжиан. Обсуждается возможность применения усреднения по вакуумным полям с использованием стохастической модели вакуума [1].

1. Интерференция произвольных постоянных полей

Рассмотрим динамику фермионов на фоне конденсата калибровочных полей группы $SU(3)\times U(1)$. В этом случае дираковский лагранжиан имеет вид

$$L=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m)\psi$$

и содержит удлиненную производную $D_{\mu}=\partial_{\mu}-ieA_{\mu}-igB_{\mu}^{a}T^{a}$. Здесь T^{a} — генераторы цветовой группы $SU(3)$. Мы пренебрегаем флуктуациями калибровочных полей на фоне внешнего поля $\overline{F}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\overline{A}_{\nu}-\partial_{\nu}\overline{A}_{\mu}$ и поля конденсата $\overline{G}^{a}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\overline{B}^{a}_{\nu}-\partial_{\nu}\overline{B}^{a}_{\mu}+gf^{abc}\overline{B}^{b}_{\mu}\overline{B}^{c}_{\nu}$. В дальнейшем предполагается, что эти калибровочные поля являются ковариантно постоянными, т.е. удлиненная производная коммутирует с тензорами калибровочных полей: $[D_{\mu},\overline{F}_{\alpha\beta}]=0$, $[D_{\mu},\overline{G}_{\alpha\beta}]=0$.

Как известно [4], эффективное действие $\Gamma_{A}=\int d^4x\,\mathcal{L}_{A}$ калибровочного поля A, отвечающее однопетлевому лагранжиану $\mathcal{L}_{A}$, записывается в виде

$$i\Gamma_{A}=\ln\left\{\det\left[(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)^{-1}\right]\right\}.$$

Здесь второй множитель под знаком детерминанта устраняет вклад нейтральных фермионов, не взаимодействующих с калибровочным полем.

При вычислении эффективного лагранжиана удобно использовать инварианты калибровочного поля

$$\mathcal{I}_1=2\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu},\quad \mathcal{I}_2=\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\gamma\delta},$$

где $\mathcal{F}_{\mu\nu}=e\overline{F}_{\mu\nu}+g\overline{G}^{a}_{\mu\nu}T^{a}$.

Опуская подробные вычисления с привлечением метода собственного времени Фока–Швингера, которые приведены в работе [2], запишем сразу окончательное выражение для эффективного лагранжиана:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,\mathrm{e}^{-im^2 s}\times$$
$$\times\,\mathrm{tr}_c\left[\frac{i\mathcal{I}_2}{2}\frac{s^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1+i\mathcal{I}_2}\right)+\cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1-i\mathcal{I}_2}\right)}{\cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1+i\mathcal{I}_2}\right)-\cos\left(\frac{s}{2}\sqrt{\mathcal{I}_1-i\mathcal{I}_2}\right)}+1\right], \tag{1}$$

где tr_c означает след по цветовым индексам. В работе [2] в соответствующую формулу под знаком следа единица входит с обратным знаком. Этот факт следует считать опечаткой, поскольку все дальнейшие результаты в [2] получены на основе правильного выражения для эффективного лагранжиана.

2. Интерференция магнитного и хромомагнитного полей

Рассмотрим частный случай интерференции чисто магнитного и хромомагнитного полей в модели $SU(3)\times U(1)$ и рассчитаем эффективный лагранжиан более простым способом. А именно потенциалы калибровочных полей выберем в следующем виде:

$$\overline{A}_\mu = Hx_1 g_{\mu 2}\,, \qquad \overline{B}^a_\mu = Bx_1 g_{\mu 2}\frac{\lambda^3}{2}\delta^a_3,$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, λ^3 — матрица Гелл-Манна, H и B — напряженности магнитного и хромомагнитного полей соответственно. Используя квадрированное уравнение Дирака

$$\left[\Pi^2 - m^2 + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\left(e\overline{F}^{\mu\nu}+g\overline{G}^{\mu\nu}\right)\right]\psi = 0,$$

находим энергетический спектр возбуждений фермионов:

$$\varepsilon^2_{n,\lambda,\sigma} = \left|eH + gB\frac{\lambda}{2}\right|(2n+1-\sigma)+k_3^2+m^2,$$
$$n=0,1,2\ldots,\quad \sigma=\pm 1,\quad \lambda=\{-1,0,1\},$$

где k_3 — проекция импульса на третью пространственную ось. Суммируя этот спектр по дискретным квантовым числам и интегрируя по k_3, с учетом кратности вырождения энергетических уровней получаем эффективное действие в следующем виде:

$$\Gamma_A = -\frac{\left(\int d^4x\right)}{2}\sum_{n,\lambda,\sigma}\frac{|eH+gB\lambda/2|}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s^2}\times$$
$$\times\exp\left\{-s\left[|eH+gB\lambda/2|(2n+1+\sigma)+m^2\right]\right\}.$$

После небольших преобразований получаем эффективный лагранжиан

$$\mathcal{L}_A = -\frac{m^4}{8\pi^2}\sum_{\lambda=-1,0,1}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s^2}\,\mathrm{e}^{-s}\times$$
$$\times\left\{(h+\lambda b)\,\mathrm{cth}[s(h+\lambda b)]-\frac{1}{s}\right\}, \tag{2}$$

где мы ввели безразмерные напряженности магнитного и хромомагнитного полей $h=eH/m^2$, $b=gB/(2m^2)$. Последнее выражение (2) может быть получено и непосредственно из исправленного лагранжиана (1) статьи [2] в пределе $\mathcal{I}_1 = 4(eH+gB\lambda/2)$, $\mathcal{I}_2=0$.

Легко видеть, что интеграл в (2) расходится на нижнем пределе. Для регуляризации данной расходимости выделим расходящуюся часть в отдельное слагаемое:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{div}} = \frac{m^4}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-s}(h^2+\frac{2}{3}b^2). \tag{3}$$

Эта расходимость естественным образом устраняется при помощи перехода к перенормированным зарядам e_r, g_r и напряженностям полей H_r, B_r:

$$H_r^2 = H^2\left(1-\frac{e^2}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-s}\right),$$
$$e_r^2 = e^2\left(1-\frac{e^2}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-s}\right)^{-1},$$
$$B_r^2 = B^2\left(1-\frac{g^2}{24\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-s}\right),$$
$$g_r^2 = g^2\left(1-\frac{g^2}{24\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-s}\right)^{-1}.$$

После такой перенормировки, равносильной вычитанию расходящегося вклада (3), эффективный лагранжиан вычисляется точно. Комбинируя несколько табличных интегралов [5], можно вывести следующее выражение:

$$\xi(a) = \int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\left(a\,\mathrm{cth}\,ax-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}a^2x\right)dx =$$
$$= -\ln(2a)\left(\frac{a^3}{3}-a+\frac{1}{2}\right)+\frac{a^3}{3}-\frac{1}{4}- \tag{4}$$
$$-4a^2\left[\frac{d}{dz}\zeta\left(z,\frac{1}{2a}\right)\right]\Bigg|_{z=-1},$$

где $\zeta\left(z,\frac{1}{2a}\right)$ — ζ-функция Римана [5]. Таким образом, регуляризованный эффективный лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_A = -\frac{m^4}{8\pi^2}\left[\xi(b+h)+\xi(|b-h|)+\xi(h)\right]. \tag{5}$$

Если в выражении (2) положить $b = 0$ и отбросить суммирование по цветам, то $\mathcal{L}_A$ переходит в хорошо известный в электродинамике лагранжиан Гейзенберга–Эйлера. Используя выражение (4), легко можно записать явное выражение для лагранжиана Гейзенберга–Эйлера, точно учитывающее вклад внешнего поля.

3. Разложение по слабому электромагнитному полю

Разложим эффективный потенциал в ряд по слабому магнитному полю $eH \ll m^2$. Тогда, используя (2), для слагаемого порядка h^4 получим

$$\mathcal{L}^4_{BH} = -\frac{m^4h^4}{12\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, x\Big[-3\,\mathrm{cth}(bx)^4 + 4\,\mathrm{cth}(bx)^2 - \frac{31}{30} + bx(3\,\mathrm{cth}(bx)^5 - 5\,\mathrm{cth}(bx)^3 + 2\,\mathrm{cth}(bx))\Big]\,dx. \tag{6}$$

Последний интеграл можно вычислить точно:

$$\mathcal{L}^4_{BH} = -\frac{m^4h^4}{8\pi^2}\times \left[-\frac{1}{45} + \frac{1}{18b^2} + \frac{1}{6b^3} + \frac{1}{4b^4} - \frac{\Psi(1,\frac{1}{2b})}{6b^5} - \frac{\Psi(2,\frac{1}{2b})}{48b^6}\right], \tag{7}$$

где $\Psi(n,x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\Psi(x)$ и $\Psi(x) = \dfrac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)]$ — известная пси-функция. Идентичный ответ можно получить, раскладывая (5) в ряд по параметру h, малому по сравнению с b.

Разложение (7) в ряд Тейлора по степеням b^{-1} при $b \to \infty$ $(gB \gg m^2)$ дает

$$\mathcal{L}^4_{BH} = -\frac{m^4h^4}{8\pi^2}\left[-\frac{1}{45} + \frac{1}{18b^2} - \frac{1}{6b^3} + \frac{1}{4b^4} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{b^5}\Big)\right]. \tag{8}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует чистой электродинамике при наличии внешнего магнитного поля, а второе слагаемое, пропорциональное b^{-2}, в рамках сделанных нами предположений представляет собой малую поправку за счет хромомагнитного поля. Следует отметить, что в случае интерференции электрического и хромомагнитного полей соответствующая поправка пропорциональна b.

В работе [2] использовалась стохастическая модель вакуума [1]. С этой целью использовалось усреднение хромомагнитного поля по гауссову распределению

$$P(g\mathbf{B}^a)\,d^3(gB^a) \equiv \left(\frac{3}{2\pi\langle g^2\mathbf{B}^2_a\rangle_G}\right)^{3/2} \times \exp\left[\frac{-3\,(g\mathbf{B}^a)^2}{2\langle g^2\mathbf{B}^2_a\rangle_G}\right] d^3(gB^a). \tag{9}$$

Однако гауссово интегрирование нельзя применять к разложению (8), поскольку интегрирование по $d^3(gB^a)$ в (9) ведется в пределах от 0 до ∞, в то время как (8) справедливо только при $gB \gg m^2$. В работе [2] величина параметра $m^2/\sqrt{g^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}$ оценивается в пределах 10^{-4}–10^{-3}, что и используется при оценке интеграла (см. (39) в [2]). Такая оценка фактически соответствует разложению (8), поэтому нам представляется, что применение стохастического усреднения в работе [2] было произведено некорректно.

Заключение

Таким образом, в рамках подхода, основанного на применении метода точных решений в модели постоянного поля для описания глюонного фонового поля, мы получили оценку вклада интерференции абелева и неабелева калибровочных полей в эффективный лагранжиан. При этом в случае чисто электромагнитного поля для эффективного лагранжиана удается получить явное выражение через ζ-функцию и ее производную. Представляет интерес дальнейшее развитие данного подхода для исследования воздействия внешних электромагнитных и вакуумных калибровочных полей на распространение света с учетом их флуктуирующего характера.

Литература

1. *Симонов Ю.А.* // УФН. 1996. **166**, № 4. С. 337.
2. *Elze H.-Th., Müller B., Rafelski J.* E-print Archive: hep-ph/9811372.
3. *Rafelski J., Elze H.-Th.* E-print Archive: hep-ph/9806389.
4. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
21.06.00