вырождается в линию на плоскости, что соответствует $kp = 1$.

В заключение представим аналитический вид радиус-вектора двухсолитонной поверхности, полученной методом ПБ (3):

$$\mathbf{R} = \left(-\frac{2k}{1+k^2}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\psi} + \frac{4p}{1+p^2}\left[\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}} \times \right.\right.$$
$$\times \frac{\sin\varphi \operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}^2\psi} - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}} \times$$
$$\left.\times \frac{k}{1+k^2}\frac{2\cos\varphi\operatorname{ch}\psi - \left(k - \frac{1}{k}\right)\sin\varphi\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}^2\psi}\right];$$
$$\frac{2k}{1+k^2}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{ch}\psi} + \frac{4p}{1+p^2}\left[-\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}} \times \right.$$
$$\times \frac{\cos\varphi\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}^2\psi} - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}}\frac{k}{1+k^2} \times$$
$$\left.\times \frac{2\sin\varphi\operatorname{ch}\psi + \left(k - \frac{1}{k}\right)\cos\varphi\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}^2\psi}\right];$$
$$-\frac{2k}{1+k^2}\operatorname{th}\psi + x + t + \frac{4p}{1+p^2} \times$$
$$\times \left[\frac{\cos z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos z_1^k}}(-\operatorname{ch}^{-2}\psi + 2) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{\sin z_2^{k,p}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos z_1^k}}\frac{k^2-1}{k^2+1}\operatorname{ch}^{-2}\psi\right]\right).$$

На рис. 1 ($k=-1$, $p=5$), рис. 2 ($k=-\frac{9}{10}$, $p=\frac{10}{9}$) и рис. 3 ($k=\frac{9}{10}$, $p=\frac{10}{9}$) представлен внешний вид линий уровня и соответствующих поверхностей в пространстве для заданных коэффициентов. Рисунки подготовлены в математическом пакете MathCad 2000 Professional.

Автор выражает свою признательность проф. А.Г. Попову за полезные обсуждения статьи.

Литература

1. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Докл. РАН. 1993. **332**, № 4. С. 418.
2. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. 6. М.: Знание, 1991.
3. *Bianchi Z.* Lezioni di geometria differenziale. V. 1, pt. 2. Bologna, 1927.
4. *Зададаев С.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 2. С. 41.

Поступила в редакцию
19.07.00

УДК 519.6

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В. Н. Титаренко, А. Г. Ягола, Н. Н. Николаева

(*кафедра математики*)

E-mail: yagola@inverse.phys.msu.su

Рассматривается задача Коши для двумерного уравнения Лапласа при условии принадлежности точного решения некоторому компактному множеству. При заданных погрешностях с помощью метода отсечения выпуклых многогранников строятся области, которым принадлежат приближенные решения некоторых задач Коши.

1. Постановка задачи

Особенностью некорректных задач является невозможность оценить близость приближенного решения задачи к точному [1, 2]. Но если известно, что точное решение задачи принадлежит некоторому компактному множеству, то задача сводится к нахождению квазирешения и возможна оценка его погрешности. В настоящей работе рассматривается применение метода отсечения выпуклых многогранников, предложенного в [3], при решении некоторых задач Коши для двумерного уравнения Лапласа при условии принадлежности точного решения компактному множеству.

Задача Коши для уравнения Лапласа является классической некорректной задачей, которой посвящены работы многих авторов (см., напр., [4–7]). Пусть задана некоторая ортогональная система координат (u, v). Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа в прямоугольнике $D = [0, a] \times [0, b]$:

$$\begin{cases} \triangle w = 0, & (u,v) \in D, \\ w(u,0) = \varphi(u), & u \in [0,a], \\ w_v(u,0) = \psi(u), & u \in [0,a]. \end{cases}$$

Считаем, что $\varphi(u), \psi(u) \in L_2[0,a]$. Необходимо найти функцию $\mu(u) = w(u,b)$ или $\mu(u) = w_v(u,b)$

при некоторых условиях на функции $f_1(v) \equiv w(0,v)$ (или $f_1(v) \equiv w_u(0,v)$), $f_2(v) \equiv w(a,v)$ (или $f_2(v) \equiv \equiv w_u(a,v)$) такие, что $f_1(v), f_2(v) \in L_2[0,b]$.

Задачу Коши можно записать в виде операторного уравнения

$$A\mu = \chi, \qquad \chi \in L_2[0,a], \tag{1}$$

с линейным непрерывным оператором A. При этом функция $\chi(u)$ линейно зависит от функций $\varphi(u)$ и $\psi(u)$.

Пусть на отрезке $[0,a]$ задана ортонормированная система функций $\{\omega_i\}_1^\infty$, полная в $L_2[0,a]$. Считаем, что функции $f_1(v)$ и $f_2(v)$ известны точно, а вместо точно заданных функций $\bar\varphi(u)$ и $\bar\psi(u)$ известны функции $\varphi_{\delta_1}(u), \psi_{\delta_2}(u) \in L_2[0,a]$ и векторы $\delta_1 = \{\delta_1^m\}_1^\infty$, $\delta_2 = \{\delta_2^m\}_1^\infty$ такие, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (\delta_1^m)^2 < \infty$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (\delta_2^m)^2 < \infty$, и для соответствующих коэффициентов Фурье справедливы неравенства

$$|B_m - \overline{B}_m| \leqslant \delta_1^m, \quad |C_m - \overline{C}_m| \leqslant \delta_2^m, \quad m = \overline{1,\infty}.$$

Зависимость приближенной функции $\chi_\delta(u)$ от функций φ_{δ_1} и ψ_{δ_2} имеет тот же вид, что и зависимость функции $\bar\chi(u)$ от $\bar\varphi(u)$ и $\bar\psi(u)$. Поэтому вектор погрешности δ, соответствующий функции χ_δ, линейно зависит от векторов δ_1 и δ_2.

Пусть на отрезке $[0,a]$ задана сетка $\{u_i\}_1^n$ $(0 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n = a)$ и значения функции $\mu(u)$ на данной сетке равны $\{z_i\}_1^n$. Для некоторых задач удобно ввести другие сетки $\{u_i\}_1^n$, например, $0 = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < a$ или $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < a$.

Рассмотрим на отрезке $[0,a]$ кусочно-линейную функцию

$$g_n(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}(z_{i+1} - z_i) + z_i = \\ = \frac{z_{i+1} - z_i}{u_{i+1} - u_i}u + \frac{z_i u_{i+1} - z_{i+1}u_i}{u_{i+1} - u_i},$$

где $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$.

Введем линейный непрерывный оператор A_1, переводящий функцию $g_n(u)$, соответствующую функции $\mu(u)$, в функцию $\tilde g_n(u)$, являющуюся суммой первых k функций ω_i с коэффициентами, равными коэффициентам Фурье функции $g_n(u)$. В качестве оператора A_2 рассмотрим линейный непрерывный оператор, переводящий функцию $\tilde g_n(u)$ в функцию $\tilde\chi(u)$, которая равна сумме первых k функций ω_i с коэффициентами, равными коэффициентам Фурье функции $\chi_\delta(u)$. Таким образом, приближенное решение задачи (1) ищется по заданному набору данных $\{A_h, \chi_\delta, h, \delta\}$, где $A_h = A_2 \cdot A_1$ и $\|A_h\mu - A\mu\| \leqslant h\|\mu\|$.

2. Приближенное решение

Предполагаем, что точное решение $\bar\mu$ задачи (1) принадлежит некоторому компактному множеству M. Тогда в качестве приближенного решения можно взять любую функцию из множества $\Upsilon_M \equiv \{\mu \in M\colon \; \|A_h\mu - \chi_\delta\| \leqslant h\|\mu\| + |\delta|\}$, $|\delta| = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}(\delta^m)^2\right)^{1/2}$. Если обозначить $\eta = (h, \delta)$, то $\forall \mu_\eta \in \Upsilon_M\colon \mu_\eta \to \bar\mu$ при $\eta \to 0$ в пространстве L_2.

При численном решении задачи (1) удобно перейти к конечномерным евклидовым пространствам. Функция $\mu(u)$ заменяется n-мерным вектором z сеточных значений, функция $\chi_\delta(u)$ — k-мерным вектором b коэффициентов Фурье функции $\tilde\chi(u)$. Множество M заменяется множеством Z_M. При этом оператор A_h переходит в матрицу $A_h(n \times k)$.

Задача нахождения приближенного решения $\mu(u)$ задачи (1) сводится к нахождению элемента $z_\eta \in Z_M^\Delta$, где $Z_M^\Delta \equiv Z_M \cap Z^\Delta$ и

$$Z^\Delta \equiv \{z : \|A_h z - b\| \leqslant \Delta(A_h, h, \varphi_{\delta_1}, \psi_{\delta_2}, \delta_1, \delta_2, M)\}.$$

Для рассматриваемых в данной статье примеров множества Z_M являются выпуклыми многогранниками. Поэтому для нахождения вектора z можно использовать алгоритмы из [2].

3. Оценка погрешности решения

Ниже рассмотрены примеры решения задач Коши на некоторых компактных множествах M. Для всех этих множеств при построении области, которой принадлежит решение задачи (1), необходимо сделать следующее. Во-первых, найти минимальное и максимальное значения каждой координаты вектора $z \in Z_M^\Delta$. Во-вторых, исходя из структуры компактного множества M, по этим значениям построить функции $\mu^d(u)$ и $\mu^u(u)$, вообще говоря, не принадлежащие компакту M, такие, что для решения $\mu(u)$ задачи (1) справедливы неравенства $\mu^d(u) \leqslant \mu(u) \leqslant \mu^u(u)$ $\forall u \in [0,a]$.

В работе [3] предложены два способа решения этой задачи. Первый способ заключается в замене множества Z_M^Δ описанным выпуклым многогранником и затем в переборе вершин этого многогранника, а второй — в решении задачи минимизации непосредственно на множестве Z_M^Δ. В обоих способах используется задача построения выпуклого многогранника при пересечении исходного многогранника и некоторого полупространства. Для решения этой задачи в работе [3] был предложен метод отсечения выпуклых многогранников, схема которого представлена ниже.

4. Метод отсечения выпуклых многогранников

Любой выпуклый многогранник можно рассматривать как пересечение конечного числа полупространств, ограниченных гиперплоскостями.

Гранью выпуклого многогранника называется пересечение данного многогранника с одной из плоскостей, его образовавшей. Ребром выпуклого многогранника называется отрезок x_1x_2 данного многогранника, где x_1 и x_2 — его вершины, если любая внутренняя точка x отрезка x_1x_2 является граничной точкой для всех граней многогранника, содержащих данную точку.

Теорема. *Для того чтобы вершины x_1 и x_2 выпуклого многогранника W соединялись ребром этого многогранника, необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины многогранника W, не совпадающей с вершинами x_1 и x_2, множество плоскостей, проходящих через данную вершину, не содержало всех плоскостей, общих для точек x_1 и x_2.*

Многогранник полностью задается следующими данными: координатами каждой своей вершины; номерами плоскостей, которым принадлежит произвольная вершина; номерами вершин, с которыми произвольная вершина соединяется с помощью ребер многогранника.

Пусть многогранник W получается из многогранника V при пересечении его с некоторым полупространством. Тогда все вершины многогранника V в зависимости от принадлежности к рассматриваемому полупространству можно разделить на внутренние точки, граничные точки и точки отсечения. Если все точки многогранника V являются граничными точками или точками отсечения, которые не принадлежат одной грани, то многогранник W будет пустым множеством. Если граничная или внутренняя точка в многограннике V соединяется ребром с граничной или внутренней точкой, то она будет соединяться с ней этим же ребром и в W. Если внутренняя точка соединяется ребром с точкой отсечения, то она соединяется ребром с новой точкой, которая образована пересечением ребра с рассматриваемой плоскостью. Граничная точка и точка отсечения не соединяются ребром в W потому, что все ребро, кроме граничной точки, лежит вне рассматриваемого полупространства.

Рассмотрим все граничные и новые точки и найдем среди них пары, которые соединяются в W с помощью ребер. Для каждой пары найдем число общих плоскостей и их номера (при подсчете новую плоскость исключаем). Если это число меньше $(n-2)$, то рассматриваемая пара не соединяется ребром в многограннике W. Если же оно не меньше $(n-2)$, то следует рассмотреть все остальные граничные и новые точки и определить, существует ли такая вершина, которая также принадлежит общим плоскостям. Если такая вершина не существует, то рассматриваемая пара вершин соединяется ребром, в противном случае не соединяется.

5. Декартова система координат. Задача Дирихле

Задача Коши с граничными условиями первого рода может быть сведена к следующей задаче:

$$\begin{cases} \triangle w = 0, & u \in [0,\pi],\ v \in [0,b], \\ w(0,v) = 0, & v \in [0,b], \\ w(\pi,v) = 0, & v \in [0,b]. \end{cases}$$

Требуется найти функцию $\mu(u) = w(u,b)$. Функции $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\mu(u)$ можно разложить в ряд по синусам:

$$\varphi(u) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(mu), \quad \psi(u) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(mu),$$

$$\mu(u) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin(mu),$$

где

$$B_m = \int_0^\pi \varphi(u)\sin(mu)du, \quad C_m = \int_0^\pi \psi(u)\sin(mu)du,$$

$$D_m = \int_0^\pi \mu(u)\sin(mu)du.$$

Функция $\chi(u)$ должна быть ограниченной по норме пространства L_2. Поэтому в качестве функции $\chi(u)$ можно взять функцию с коэффициентами Фурье

$$\frac{D_m}{\operatorname{ch}(mb)} = B_m + \frac{\operatorname{th}(mb)}{m} C_m.$$

Ясно, что $A_2^{mm} = 1/\operatorname{ch}(mb)$ и $\delta^m = \delta_1^m + \delta_2^m \operatorname{th}(mb)/m$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu(u) = w_v(u,b)$. Тогда

$$\frac{D_m}{m\operatorname{ch}(mb)} = B_m \operatorname{th}(mb) + \frac{C_m}{m}.$$

Ясно, что $A_2^{mm} = 1/m\operatorname{ch}(mb)$, $\delta^m = \delta_1^m \operatorname{th}(mb) + \delta_2^m/m$.

Считаем, что $w(u,b) = \sin(u)$, $w_v(u,b) = \sin(u)/2$. В качестве функции $\varphi_{\delta_1}(u)$ $(\psi_{\delta_2}(u))$ берем сумму точной функции $\bar\varphi(u)$ $\big(\bar\psi(u)\big)$ и произвольной функции из пространства L_2, модуль которой не превышает 3% от максимального значения функции $\bar\varphi(u)$ $\big(\bar\psi(u)\big)$. Решения ищем на множестве выпуклых вверх на отрезке $[0,\pi]$ функций, ограниченных сверху константами $C = 1.2$ для $w(u,b)$ и $C = 0.6$ для $w_v(u,b)$. Следует отметить,

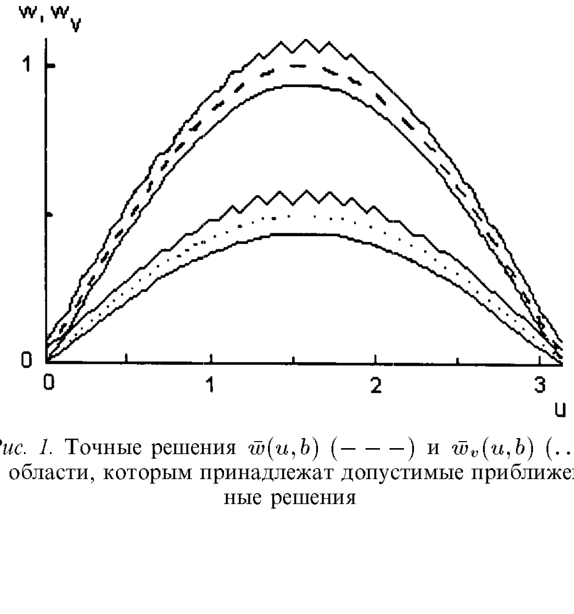

Рис. 1. Точные решения $\bar w(u,b)$ $(---)$ и $\bar w_v(u,b)$ $(\ldots)$ и области, которым принадлежат допустимые приближенные решения

что задачи нахождения $w(u,b)$ и $w_v(u,b)$ решаются отдельно друг от друга. Для погрешностей получаем: $|\delta_1| = 0.045$, $|\delta_2| = 0.019$. Считаем, что $b = 1$, $n = 20$, $k = 20$, $\Delta = 0.053$ (для $w(u,b)$ и $w_v(u,b)$). Точные решения и соответствующие области представлены на рис. 1.

6. Задача Коши в кольце

Рассмотрим задачу Коши в кольце $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $a \leqslant v \leqslant b$. Решение данной задачи в полярной системе координат можно записать в виде

$$w(u,v) = \frac{B_0}{2}\frac{\ln(v/a)}{\ln(b/a)} + \frac{F_0}{2}\frac{\ln(b/v)}{\ln(b/a)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v^{2m}-a^{2m}}{b^{2m}-a^{2m}}\frac{b^m}{v^m}(B_m\cos(mu) + C_m\sin(mu)) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b^{2m}-v^{2m}}{b^{2m}-a^{2m}}\frac{a^m}{v^m}(F_m\cos(mu) + G_m\sin(mu)).$$

Тогда

$$w_v(u,v) = \frac{B_0}{2}\frac{1}{v\ln(b/a)} - \frac{F_0}{2}\frac{1}{v\ln(b/a)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b^m m(v^{2m}+a^{2m})}{v^{m+1}(b^{2m}-a^{2m})}(B_m\cos(mu) + C_m\sin(mu)) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m m(v^{2m}+b^{2m})}{v^{m+1}(b^{2m}-a^{2m})}(F_m\cos(mu) + G_m\sin(mu)).$$

Пусть $\varphi(u) = w(u,b)$, $\psi(u) = w_v(u,b)$. Требуется найти $\mu(u) = w(u,a)$. Все эти функции можно разложить в ряд Фурье по синусам и косинусам:

$$\varphi(u) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(B_m\cos(mu) + C_m\sin(mu)),$$

$$\psi(u) = \frac{D_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(D_m\cos(mu) + E_m\sin(mu)),$$

$$\mu(u) = \frac{F_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(F_m\cos(mu) + G_m\sin(mu)).$$

Обозначим $q = (a/b)^m$. В качестве функции $\chi(u)$ можно взять функцию с коэффициентами Фурье

$$F_0 = B_0 - b\ln\frac{b}{a}D_0,\quad qF_m = \frac{1+q^2}{2}B_m - \frac{b}{2m}(1-q^2)D_m,$$

$$qG_m = \frac{1+q^2}{2}C_m - \frac{b}{2m}(1-q^2)E_m.$$

Если $\mu(u) = w_v(u,a)$, то

$$F_0 = \frac{b}{a}D_0,\quad \frac{q}{m}F_m = -\frac{1-q^2}{2a}B_m + \frac{b}{2am}(1+q^2)D_m,$$

$$\frac{q}{m}G_m = -\frac{1-q^2}{2a}C_m + \frac{b}{2am}(1+q^2)E_m.$$

Считаем, что $w(u,a) = \sin(u)$, $w_v(u,a) = \sin(u)/2$. Решения ищем на множестве функций с константой Липшица $L = 1.2$ для $w(u,a)$ и $L = 0.6$ для $w_v(u,a)$. Задачи нахождения $w(u,a)$, $w_v(u,a)$ решаются отдельно друг от друга. Для погрешностей получаем: $|\delta_1| = 0.090$, $|\delta_2| = 0.038$. Полагаем, что $a = 1$, $b = 2$, $n = 20$, $k = 20$, $\Delta = 0.143$ для $w(u,a)$, $\Delta = 0.081$ для $w_v(u,a)$. Точные решения и соответствующие области представлены на рис. 2.

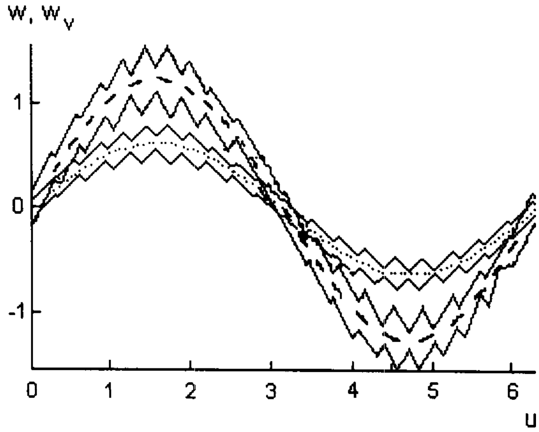

Рис. 2. Точные решения $\bar{w}(u,a)$ $(- - -)$ и $\bar{w}_v(u,a)$ $(\ldots)$ и области, которым принадлежат допустимые приближенные решения

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-01-00447).

Литература

1. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. *Тихонов А.Н., Гончарский А.Н., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
3. *Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**, раздел 1, С. 8 (http://num-meth.srcc.msu.su).
4. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1961.
5. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
6. *Reinhardt H.-J., Houde Han, Dinh Nho Hào* // SIAM J. Numer. Anal. 1999. **36**, No. 3, P. 890.
7. *Berntsson F., Eldén L.* Technical report LiTH-MAT-R-2000-22, Department of Mathematics, Linköping University, September 2000.

Поступила в редакцию
30.10.00