ПРИГЛАШЕННЫЙ ОБЗОР

УДК 517.9; 519.2; 531

ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ
II. ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА И УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А. Ю. Лоскутов

(*кафедра физики полимеров и кристаллов*)

E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su

Вторая часть работы*), посвященной новейшим проблемам нелинейной динамики, представляет собой обзор недавних результатов, относящихся к теории управления нелинейными (в том числе хаотическими) динамическими системами и подавлению хаоса. Описаны современные подходы к стабилизации неустойчивого поведения детерминированных систем и наиболее приемлемые с прикладной точки зрения методы вывода динамических систем на заданный режим движения.

Содержание

Введение ... 3
1. Системы с внешними возмущениями ... 5
1.1. Мультипликативное и аддитивное возмущения ... 5
1.2. Общие свойства периодически возмущаемых систем ... 6
2. Управление хаотическими динамическими системами ... 8
2.1. Метод резонансных возбуждений ... 8
2.2. Метод Гребоджи–Отта–Йорка ... 8
3. Подавление хаоса ... 10
3.1. Параметрическое возбуждение ... 10
3.2. Методы резонансной и высокочастотной стабилизации ... 12
4. Подавление хаоса и стабилизация заданных циклов ... 13
4.1. Кусочно-линейное отображение и отображение с гиперболическим аттрактором ... 13
4.2. Отображения с критическими точками ... 16
Заключение ... 19

Введение

В течение долгого времени представление о хаотических колебаниях ассоциировалось с допущением, что в системе необходимо возбуждение по крайней мере чрезвычайно большого числа степеней свободы. Эта концепция, по-видимому, сформировалась под действием понятий, сложившихся в статистической механике: в газе движение каждой отдельной частицы в принципе предсказуемо, но поведение системы из очень большого числа частиц чрезвычайно сложно, и поэтому детализированное динамическое описание теряет смысл. Отсюда — потребность в статистическом описании. Однако, как показали многочисленные исследования, статистические законы, а вместе с ними и статистическое описание не ограничены только очень сложными системами с большим числом степеней свободы. Дело здесь не в сложности исследуемой системы и не во внешних шумах, а в появлении при некоторых значениях параметров экспоненциальной неустойчивости движения.

Развитие теории динамических систем внесло много нового в понимание происхождения хаотичности и привело к ряду важнейших открытий (см. обзор [1]). Обоснование эргодической гипотезы Больцмана для определенного класса систем [2–4], доказательство сохранения квазипериодического движения при возмущении интегрируемых систем (теорема Колмогорова–Арнольда–Мозера) [5–7], введение энтропии Колмогорова [8–10], под-

---

За цикл работ «Управление динамическими системами, подавление хаоса и их приложения» А. Ю. Лоскутову в 1998 г. присуждена премия им. И. И. Шувалова 1-й степени.

*) Первая часть «Проблемы нелинейной динамики. I. Хаос» опубликована в журнале «Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.» (2001. №2. С. 3).

ковы Смейла [11, 12] и y-систем Аносова [7, 13] стимулировали развитие новых направлений современной математики и математической физики, отражающих всю глубину проблем, которые рассматриваются в теории хаотических колебаний (см. также [14–17]). Таким образом, проблема предсказуемости, первоначально возникшая при описании достаточно сложных систем (таких, как гидродинамические или системы статистической механики), стала общей для многих направлений современной науки.

В связи с этим в последнее время стало интенсивно развиваться новое направление в нелинейной динамике, посвященное проблемам предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и возможности подавления хаоса. Теоретические и экспериментальные работы в этой области выявили одно неожиданное и вместе с тем замечательное свойство хаотических динамических систем: они являются весьма податливыми и чрезвычайно чувствительными к внешним воздействиям. По-видимому, именно это обстоятельство лежит в основе процессов структурообразования в живых тканях. Развитие любого живого организма есть последовательность автономных актов самоорганизации. Благодаря этому развивающаяся структура характеризуется возможностью перейти в одно из очень большого числа допустимых равноправных состояний. Тем не менее эволюционирующая система всегда проявляет только определенную (заданную) динамику. Управление этим процессом может быть осуществлено с помощью слабых воздействий, которые и влияют на выбор того или иного конкретного состояния.

Таким образом, была обнаружена возможность *управлять* динамикой хаотических систем, т. е. посредством *достаточно слабых* воздействий переводить первоначально хаотические системы на *требуемый* динамический режим и тем самым стабилизировать их поведение. Более того, как оказалось, для распределенных сред внешнее воздействие при некоторых условиях приводит к рождению сложных пространственно протяженных структур с заданными свойствами. Исследования показали, что эти результаты имеют непосредственное отношение ко многим областям естественных наук, поскольку на этом пути удается найти подходы к таким важным и насущным приложениям, как обработка (запись, кодирование и расшифровка) информации [18–20], скрытая пересылка зашифрованных сообщений [21–24], проблема самоорганизации и искусственное создание когерентных структур в распределенных системах, обладающих пространственно-временным хаосом [25–28], стабилизация сильно неупорядоченных сокращений сердечной мышцы и дефибрилляция [29–32], инженерия динамических систем [33] и др. [34, 35] (см. также обзоры [36, 37]). Понятно, что решение даже части этих проблем, с одной стороны, в значительной степени углубляет понимание процессов и закономерностей, лежащих в основе поведения самых разнообразных нелинейных динамических систем, и, с другой стороны, позволяет значительно продвинуться в развитии теории нелинейных колебаний как сосредоточенных, так и распределенных систем.

Под стабилизацией неустойчивого или хаотического поведения обычно подразумевается искусственное создание в изучаемой системе *устойчивых* (как правило, периодических) колебаний посредством внешних мультипликативных или аддитивных воздействий. Иными словами, для стабилизации необходимо найти такие внешние возмущения, которые вывели бы систему из хаотического режима на регулярный. При внешней простоте формулировки этой проблемы ее решение для ряда динамических систем оказывается достаточно сложной задачей. Более того, хотя в настоящее время имеется большое число работ, посвященных этому вопросу (см., напр., [38–61], цитированную там литературу и обзоры [36, 37, 49, 50, 62, 63]), развить последовательную теорию и более или менее строго обосновать возможность стабилизации хаотического поведения удалось пока только для достаточно общих *семейств* динамических систем [38, 52, 54, 57, 64–73].

Стабилизация хаотического поведения может быть осуществлена двумя различными способами. Первый из них обеспечивает выведение системы из хаотического на регулярный режим посредством внешних возмущений, реализованных *без* обратной связи. Другими словами, этот метод не учитывает текущее состояние динамических переменных системы. Качественно отличный от данного метод реализуется посредством корректирующего воздействия в соответствии с требуемым значением динамических переменных и, таким образом, *вовлекает* обратную связь как необходимую компоненту динамической системы. По установившемуся соглашению первый способ стабилизации хаотической динамики называется *подавлением хаоса* или контролированием (иногда управлением или регулированием) хаотической динамики без обратной связи. Второй способ носит название *контролирование хаоса* с обратной связью (controlling chaos). В свою очередь, реализация каждого из этих методов может быть проведена параметрическим или силовым способом.

Введение обратной связи является определенным преимуществом, поскольку в большинстве случаев такой способ управления приводит к требуемому результату: выбранный заранее седловой предельный цикл стабилизируется и, таким образом, исследуемая система выводится на предписанный режим движения. Однако этот метод эффективен, если только изображающая точка находится вблизи выбранного цикла. В противном случае необходимо использовать дополнительные способы воздействия [74–77]. В то же время методы без обратной связи не требуют введения постоянного компьютерного слежения за состоянием системы и менее подвержены воздействиям шумов, что существенно упрощает их использование в приложениях [78].

Стабилизация хаотической динамики и управление поведением различных систем составляют часть общей задачи *управления динамическими системами* (см. [79] и приведенные там ссылки). Эта проблема может быть решена на основе использования различных методов, наиболее известные и эффективные из которых представлены в настоящей работе.

1. Системы с внешними возмущениями

В данном разделе описываются достаточно общие свойства динамических систем, подверженных определенным внешним воздействиям. Эти свойства позволяют существенно упростить их изучение и выявить ряд важных особенностей, присущих широкому классу возмущенных нелинейных потоков и каскадов.

Поскольку ниже рассматриваются в основном системы с хаотическим поведением, введем подмножество A_c множества допустимых параметрических значений A, $A_c \in A$, такое, что при $a \in A_c$ динамическая система (в том или ином смысле, точные определения см. в [1, 14]) проявляет хаотические свойства.

1.1. Мультипликативное и аддитивное возмущения

Предположим, что рассматривается динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$, с некоторым возмущением. Если такое возмущение реализуется посредством мультипликативного воздействия по отношению к динамическим переменным x_i, то говорят, что имеет место *параметрическое* (или *мультипликативное*) управление, поскольку, как правило, параметры мультипликативно включаются в динамическую систему. В этом случае регулирование состоит в такой модификации функции $\mathbf{v}$ в соотношении (1), чтобы новая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t)$ имела требуемое (выбранное заранее) поведение. Здесь $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}\Big(\mathbf{x}, a_0 + a_1(t)\Big)$ и параметр $a_1(t)$ обычно является периодической функцией. Для параметрических возмущений *с обратной связью* учитывается текущее состояние системы, $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}\Big(\mathbf{x}, a(\mathbf{x}(t))\Big)$, так что параметр a изменяется специальным путем, и необязательно периодически.

Достаточно часто в приложениях встречается ситуация, когда мультипликативное введение внешних возмущений в систему невозможно. Тогда фазовый поток $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G)$ разлагается на две составляющие: часть, соответствующую невозмущенному фазовому потоку, $\mathbf{F}^t(\mathbf{x})$, и компоненту $\mathbf{F}^t(G)$, которая инициируется исключительно возмущениями, $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G) = \mathbf{F}^t(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^t(G)$. В этом случае имеет место аддитивное возмущение, т. е. $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{g}(t)$, где $\mathbf{g}(t)$ обозначает внешнее воздействие. Таким образом, управление динамикой системы подразумевает приложение силовой компоненты к векторной функции. Поэтому данный тип управления поведением динамической системы называется *силовым*. В свою очередь, если в силовом контроле учитывается обратная связь, то функция $\mathbf{v}$ модифицируется как $v_i' = v_i(x, a) + g_k(x_i(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

По ряду причин параметрический метод имеет определенные преимущества перед силовым. Во-первых, в приложениях к физическим, химическим, биологическим и другим важным системам часто рассматриваются величины, пропорциональные динамическим переменным x_i. Для таких систем $\mathbf{v}(0, a_1, \ldots, a_m) = 0$, а гиперповерхности x_i являются инвариантными множествами. Это означает, что система (1) отражает реальные процессы только на симплексе $\mathbf{X} = \Big\{\mathbf{x} \,\Big|\; x_i > 0,\; \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < \mathrm{const}\Big\}$. В этом случае внешнее аддитивное воздействие может привести к тому, что фазовые траектории покинут множество $\mathbf{X}$, пересекая гиперповерхности $x_j = 0$. Поэтому силовое воздействие часто становится причиной вырождения системы или выхода ее на нежелательный режим эволюции. Например, для биологических систем это означает вымирание части особей. В то же время параметрическое воздействие означает изменение ресурсов системы и, таким образом, является более тонким в сравнении с силовым.

Во-вторых, силовое возмущение гораздо труднее реализовать. Так, для химических систем силовой контроль подразумевает введение (и соответственно удаление) дополнительных веществ; для биологических систем такой метод может быть реализован через стерилизацию части особей или посредством введения в сообщество дополнительных видов.

С другой стороны, в противоположность параметрическому воздействию силовой метод, как правило, приводит к требуемому результату почти для всех систем, поскольку во многих случаях ее естественное поведение может быть буквально «задавлено» внешней силой.

Опишем один из давно известных результатов, касающийся силового воздействия [80]. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x},\theta) + \varepsilon\mathbf{g}(\theta),\\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned} \tag{2}$$

заданную в некоторой области $D = D_0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, где $D_0 \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная, гомеоморфная шару область, содержащая точку $\mathbf{x} = 0$ и имеющая гладкую границу ∂D_0, и ε — параметр. Относительно правой части системы (2) будем предполагать следующее: $A(\theta)$ и $\mathbf{g}(\theta)$ являются T-периодическими функциями класса C^0, параметр ε удовлетворяет условию $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$, и функция $\mathbf{F}: D \to \mathbf{R}^n$ имеет вид $\mathbf{F}(\mathbf{x},\theta) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\theta,\mathbf{x})\mathbf{x}^{A_i}$, $N \in \mathbf{N}$, $A_i \in \mathbf{Z}^n$, $A_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$, $a_i^j \geqslant 0$, $||A_i|| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \geqslant 2$, где $f_i(\theta,\mathbf{x})$ — T-периодические функции и класса C^1 по θ, и класса C^1 по $\mathbf{x}$ в D_0. В частности, $A(\theta)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x},\theta)$ могут от θ не зависеть. В дальнейшем нам понадобится понятие тривиального цикла L_0^T в D, которым назовем множество $0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$.

Теперь можно получить следующий результат (см. [80]): если система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= A(\theta)\mathbf{y},\\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned} \tag{3}$$

в ограниченной области $B: L_0^T \subset B$ груба, то существуют значения $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ система (2) обладает предельным циклом L^T, отличным от L_0^T (при $\varepsilon \neq 0$), причем для любой окрестности $U \supset L_0^T: U \subset D$ существует $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_1$ цикл $L^T \subset U$. Если, кроме того, L_0^T является устойчивым для системы (3), то для достаточно малых ε цикл L^T будет асимптотически устойчивым. Таким образом, если принять, в частности, $n = 2$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},\theta) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $A(\theta) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\delta \end{pmatrix}$, $\delta > 0$, то при $\varepsilon = 0$ система (2) описывает нелинейные колебания, затухающие в некоторой окрестности $\mathbf{x} = 0$. В этом случае приведенное утверждение гарантирует, что при наличии достаточно малой вынуждающей силы в некоторой окрестности начала координат имеются *устойчивые* периодические колебания.

На основании этих результатов естественно предположить, что если удачно подобрать частоту внешнего воздействия на *хаотическую* систему, то даже при достаточно малых амплитудах такое воздействие приведет либо к *стабилизации* неустойчивых циклов, существовавших в невозмущенной системе, либо к рождению новых *устойчивых* циклов. Эта проблема была исследована в работах [81–83] (см. также [84]), в которых рассматривалось *силовое* возбуждение систем со странным аттрактором. Однако гипотеза о стабилизации хаотических колебаний *параметрическим* образом в области A_c, отвечающей существованию только хаотического поведения (чтобы можно было говорить именно о *подавлении хаоса*), впервые численно получила подтверждение в публикациях [85–87] (см. также обзор [68]), где был рассмотрен класс дифференциальных уравнений с неполиномиальной правой частью. Впоследствии метод подавления хаоса (без обратной связи) был аналитически обоснован в работах [66, 67].

Позже данное направление получило широкое распространение после известной работы группы из Мэриленда [64, 65], где было показано, что при помощи достаточно слабых параметрических возмущений возможно стабилизировать практически любой седловой предельный цикл, вложенный в хаотический аттрактор. Публикация этих результатов стимулировала изучение вопросов стабилизации хаотического поведения и вызвала большой интерес к проблемам управления неустойчивыми системами. Появилась целая серия работ, как численных, так и теоретических, посвященных исследованиям возможности подавления хаоса и получения периодической или другой требуемой динамики в различных системах и отображениях. Этот раздел теории динамического хаоса в настоящее время продолжает интенсивно развиваться: публикуются новые работы (в основном численные и экспериментальные), в которых предлагаются либо различные усовершенствования уже известных методов, либо их приложения к новым классам систем, в частности к распределенным системам (см., напр., [47, 48, 58, 88–94] и приводимые там ссылки).

1.2. Общие свойства периодически возмущаемых систем

Предположим, что рассматриваемая система задается обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (1). Проблема управления ее поведением заключается в том, чтобы найти такое внешнее возмущение G, при котором фазовый поток $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G)$, порождаемый возмущенной динамической системой $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'(\mathbf{x}, a, G)$, стремился бы к выбранному подмножеству $X(G)$ ее фазового пространства. Подмножество $X(G)$ может быть как аттрактором, так и неустойчивым множеством. В последнем случае возмущения G модифицируют систему (1) таким образом, что фазовые траектории подходят к подмножеству $X(G)$ и остаются в достаточно малой его окрестности $U \supset X(G)$ под действием G. Как правило, в приложениях в качестве подмножества $X(G)$ выбирается цикл определенного периода.

Для развития аналитического подхода рассмотрим отображение $T_a\colon M \to M$,

$$T_a: \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a), \tag{4}$$

где $a \in A$, $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Определим возмущение G, действующее на множестве параметров A, $G : A \to A$, как

$$G : a \longmapsto g(a), \quad a \in A. \tag{5}$$

Тогда результирующее возмущенное отображение можно записать в виде

$$\mathbf{T}_a : \begin{cases} \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a), \\ a \longmapsto g(a), \quad \mathbf{x} \in M, \quad a \in A. \end{cases} \tag{6}$$

Далее ограничимся только *периодическими* возмущениями. Тогда, анализируя отображение (6), можно обнаружить ряд его интересных свойств [68, 69, 95, 96]. Прежде всего легко понять, что период t любого цикла периодически возмущаемого отображения (4) определяется из соотношения $t = \tau k$, где τ — период возмущения и k — положительное целое. Действительно, если возмущенное отображение имеет t-периодический цикл, то последовательность координат точек, которые его формируют, также является периодической с периодом t. Но последовательность параметров a по определению периодична с периодом τ. Поэтому всегда $t = \tau k$, где k — целое.

Здесь, однако, необходимо сделать одно существенное замечание. Если спроектировать полученный t-периодический цикл на пространство M (т. е. просто рассмотреть систему (6) как неавтономную), то возможно получить цикл, который не может быть назван циклом в обычном понимании. Причина состоит в том, что точки цикла, которые отличаются друг от друга только значением координаты a (если такие точки существуют), спроектируются в одну и ту же точку пространства M. Поэтому изображающая точка возмущенного отображения будет по нескольку раз попадать в некоторые точки, формирующие цикл. Например, для одномерных отображений, $n = 1$, в общем случае в проекции на исходное пространство $M = I$ получится цикл периода $k\tau$. Однако в I возможно получить цикл с совпадающими x-координатами, когда $x_i = x_m$, $a_i \neq a_m$, $i \neq m$, где (x_i, a_i) и (x_m, a_m) — точки цикла отображения (6). В этом случае на координатной оси получится $(P - l)$ точек, где l — число совпадений. В частности, при $P = 2$ $(\tau = 2)$ вполне возможно в проекции наблюдать только одну фиксированную точку. Для $P > 2$ вероятно появление более экзотических циклов. Описанная ситуация, однако, не является случаем общего положения и, как правило, встречается только при специально подобранных возмущениях.

Введение τ-циклического преобразования (5) отображения (4) означает, что результирующее отображение (6) можно записать как

$$\mathbf{T}_a = \begin{cases} T_{a_1} : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1) \equiv \mathbf{f}_1, \\ T_{a_2} : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_2) \equiv \mathbf{f}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ T_{a_\tau} : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_\tau) \equiv \mathbf{f}_\tau. \end{cases} \tag{7}$$

Введем в рассмотрение τ функций следующего вида: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}_\tau(\mathbf{f}_{\tau-1}(\ldots \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}))\ldots))$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(\mathbf{f}_{\tau-1}(\ldots \mathbf{f}_3(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}))\ldots)))$, $\ldots$, $\mathbf{F}_\tau = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathbf{f}_{\tau-2}(\ldots \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(\mathbf{x}))\ldots))$, где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathbf{f}_i = \{f_i^{(1)}, \ldots, f_i^{(n)}\}$, $\mathbf{F}_i = \{F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(n)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, \tau$, — n-компонентные функции. Таким образом, возмущенное отображение (6) представится как декомпозиция

$$T_1 : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{F}_1, \quad T_2 : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{F}_2, \quad \ldots, \quad T_\tau : \ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{F}_\tau, \tag{8}$$

для которой начальные условия определяются следующим образом: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1)$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{\tau-1} = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathbf{x}_{\tau-2})$. Теперь можно доказать [69, 96], что если отображение T_k, $1 \leqslant k \leqslant \tau$, имеет цикл периода t и функции $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ непрерывны, то отображение T_p, $p = k+1 \pmod{\tau}$, также имеет цикл того же периода t. Если цикл отображения T_k является устойчивым, то цикл отображения T_p также будет устойчивым. Более того, если $\mathbf{f}_k$ — гомеоморфизм, то отображения T_k и T_p топологически эквивалентны.

В самом деле, допустим, что $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$, $1 \leqslant k \leqslant \tau$, — функции класса C^0 и T_k имеют цикл периода t. Это означает, что существует такая точка $\tilde{\mathbf{x}}$, что $\mathbf{F}_k^t(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}_k^j(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \tilde{\mathbf{x}}$, $1 \leqslant j < t$. Рассмотрим соотношение $\mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{F}_p(\mathbf{f}_k(\mathbf{x}))$, $p = k + 1 \pmod{\tau}$. Тогда $\mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k^n) = \mathbf{F}_p^n(\mathbf{f}_k)$. Следовательно, для точки $\tilde{\mathbf{x}}$ и $n = t$ найдем: $\mathbf{F}_p^t(\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k^t(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$. Более того, при $1 \leqslant j < t$ имеет место неравенство $\mathbf{F}_p^j(\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})) \neq \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$, поскольку если $\mathbf{F}_p^j(\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$, то $\mathbf{F}_p^j(\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k^j(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$. Однако из-за однозначности функций $\mathbf{f}_i$, $i = 1, \ldots, \tau$, можно записать, что $\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{f}_{k-2}(\ldots \mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k^j(\tilde{\mathbf{x}})))) = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{f}_{k-2}(\ldots \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})))$ (см. (7)), т. е. $\mathbf{F}_k^{j+1}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{x}})$. Это противоречит предположению, сделанному выше. Иными словами, точка $\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$ является периодической с периодом t для отображения T_p.

Если точка $\tilde{\mathbf{x}}$ — устойчивая периодическая точка отображения T_k, то существует такая окрестность $U \ni \tilde{\mathbf{x}}$, что для любого $\mathbf{x} \in U$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{F}_k^{tn}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}$. Вследствие непрерывности функций $\mathbf{f}_k$ это означает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{F}_k^{tn}(\mathbf{x})) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{F}_p^{tn}(\mathbf{f}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$. Таким образом, все точки из окрестности $\mathbf{f}_k(U)$ притягиваются к точке $\mathbf{f}_k(\tilde{\mathbf{x}})$ под действием отображения T_p^t.

Основной смысл описанного построения заключается в том, что исследование отображения с периодическим возмущением можно существенно упростить. Вместо исходного неавтономного отображения (6) достаточно рассмотреть *одно из автономных* отображений T_1, T_2, ..., T_τ, определяемое выражением (8). Таким образом, вся динамика исходного отображения (6) будет задаваться совокупностью отображений (8), которые действуют независимо друг от друга и связаны лишь начальными условиями. Это справедливо для *любого* множества допустимых значений A параметра a динамической системы (4) с периодическим возмущением (5).

2. Управление хаотическими динамическими системами

Исследования проблемы управления хаотическими системами при помощи периодических воздействий, по-видимому, начались с публикаций [85–87], где изучался отклик дифференциальных уравнений определенного класса на параметрические возмущения. После появления работ [64, 65] в связи с многочисленными приложениями эта проблема стала предметом также и экспериментального анализа (см. [36, 37, 49, 50, 62, 63]). Немного позже было показано [60, 97, 98], что для достижения контроля над системой можно использовать силовое резонансное воздействие. Хотя такое воздействие можно реализовать далеко не во всех случаях, его достоинство состоит в том, что оно применимо не только к хаотическим системам.

2.1. Метод резонансных возбуждений

Для управления поведением хаотических динамических систем в ряде работ было предложено использовать так называемые *резонансные возбуждения* [60, 97–99]. Этот метод основан на наблюдении, что вследствие нелинейных модовых взаимодействий периодически возбуждаемая система в типичном случае *не* будет проявлять периодического поведения. Поэтому для рождения предписанного (т. е. заранее заданного) режима движения представляется естественным возмущать систему специальным образом. Следовательно, основную роль в данном методе играет допущение, что уравнение движения, на которое выходит система после введения возмущения, заранее известно.

Для достижения возможности контроля посредством резонансных возбуждений в динамическую систему, находящуюся в хаотическом режиме, необходимо аддитивно включить внешнее возмущение $\mathbf{F}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{F}(t). \tag{9}$$

Далее, пусть требуемая динамика задается функцией $\mathbf{y}(t)$, которая удовлетворяет так называемому уравнению предписанного движения:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}). \tag{10}$$

Теперь, выбирая возмущение в виде $\mathbf{F} = \mathbf{g}\Big(\mathbf{y}(t)\Big) - \mathbf{v}\Big(\mathbf{y}(t), a\Big)$ и подставляя его в (9), получим уравнение контролирования:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, a). \tag{11}$$

Таким образом, если устремить $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ при $t \to \infty$, то в конечном счете динамика будет представлена уравнением (10).

Отличительной чертой метода управления при помощи резонансных возбуждений является тот факт, что его практическое применение не ограничивается только хаотическими системами (чего нельзя сказать о методе Гребоджи–Отта–Йорка, см. ниже). В то же время *хаотические* системы (в некотором диапазоне начальных условий) действительно можно «заставить» вести себя предписанным образом. Однако это возможно далеко не всегда и существуют начальные условия, для которых поведение не будет задаваться функцией $\mathbf{y}(t)$. Кроме того, этот метод контроля сильно зависит от знания динамики системы и малые ошибки в модели (9) могут расти вследствие возмущения $\mathbf{F}(t)$ [99]. Тем не менее нетрудно определенным способом усовершенствовать контролирование (9)–(11). Это приведет к большей эффективности использования метода резонансных возбуждений [55].

2.2. Метод Гребоджи–Отта–Йорка

Известный параметрический *метод с обратной связью*, предложенный в работах [64, 65] и получивший широкое продолжение во многих других публикациях (ссылки см. в [36, 37, 42, 44, 49, 50, 62, 63]), основывается на предположении, что параметры a_i системы могут быть преобразованы в неявные (зависящие от $\mathbf{x}$) функции времени. Если изображающая точка находится в малой окрестности неустойчивого положения равновесия или неустойчивого предельного цикла, то малыми изменениями параметров можно добиться, чтобы она эту окрестность не покидала. В случае хаотического аттрактора тем же способом можно заставить систему «работать» практически на любом предельном цикле, вложенном в такой аттрактор.

Допустим, что в окрестности неустойчивого предельного цикла, который нужно стабилизировать, система задается отображением Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, a)$. Для этого отображения предельный цикл будет представляться неустойчивой неподвижной точкой $\mathbf{x}^*$. (Для сложного цикла, имеющего несколько оборотов, рассматривается соответствующая итерация отображения.) В окрестности $\mathbf{x}^*$ для значений параметра a, близких к выбранному a_0, поведение отображения дается линейным преобразованием

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* = \hat{A}\,(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*) + \hat{B}(a - a_0), \tag{12}$$

где $\hat{A}$ — k-мерная матрица Якоби, $\hat{B}$ — k-мерный вектор-столбец, $\hat{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$, $\hat{B} = \partial\mathbf{f}/\partial a|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$, взятые в точке $a = a_0$. Если от итерации к итерации параметр a изменяется, то, определяя $\mathbf{x}_n$ через линейное отображение (12), можно задать подходящее малое отклонение значения a от номинального a_0. В линейном приближении это изменение параметра можно записать в виде

$$a_n - a_0 = -\hat{L}^T\left(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\right),$$

где $\hat{L}$ — k-мерный вектор-столбец и T означает операцию транспонирования. Следовательно, из (12) находим, что

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \left(\hat{A} - \hat{B}\hat{L}^T\right)\delta\mathbf{x}_n,$$

где $\delta\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*$. Таким образом, неподвижная точка $\mathbf{x}^*$ будет стабилизирована, если определить $\hat{L}$ так, чтобы матрица $\left(\hat{A} - \hat{B}\hat{L}^T\right)$ имела собственные значения, по модулю меньшие единицы.

Очевидно, возмущение параметра a вблизи его номинального значения не должно быть слишком большим. Максимально допустимое отклонение $\delta a_{\max}$ дается выражением $\delta a_{\max} \sim \left|\hat{L}^T(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*)\right|$.

Рассмотрим поведение исходного отображения при малом отклонении управляющего параметра, $-a' < a < a'$. Пусть $|\lambda_s| < 1$ и $|\lambda_u| > 1$ — собственные значения, соответствующие устойчивому и неустойчивому направлениям на поверхности сечения в точке $\mathbf{x}^*$, а $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_u$ — собственные векторы, отвечающие этим направлениям. Если отклонить параметр a от его номинального значения a_0 на некоторую величину, $a = \bar{a}$, $\bar{a} \in (-a', a')$, то положение неподвижной точки окажется смещенным в некоторую другую точку $\mathbf{x}^*(\bar{a})$. Для малых отклонений $(a - \bar{a})$ новое положение определяется соотношением

$$\mathbf{g} \equiv \left.\frac{\partial\mathbf{x}^*(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} \simeq \frac{1}{\bar{a}}\,\mathbf{x}^*(\bar{a}).$$

Вблизи $\mathbf{x}^*$ можно использовать линейное приближение

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*(a) \simeq \hat{A}\Big(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*(a)\Big).$$

Тогда с учетом того, что $\mathbf{x}^*(a) \simeq a\mathbf{g}$,

$$\mathbf{x}_{n+1} \simeq a_n\mathbf{g} + (\lambda_u\mathbf{e}_u\mathbf{q}_u + \lambda_s\mathbf{e}_s\mathbf{q}_s)(\mathbf{x}_n - a_n\mathbf{g}),$$

где векторы $\mathbf{q}_u$ и $\mathbf{q}_s$ определяются из соотношений $\mathbf{q}_s\mathbf{e}_s = \mathbf{q}_u\mathbf{e}_u = 1$, $\mathbf{q}_s\mathbf{e}_u = \mathbf{q}_u\mathbf{e}_s = 0$. Следовательно, $a_n = a_n(\mathbf{x}_n)$. Для $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^*$ необходимо, чтобы точка $\mathbf{x}_n$ почти попала на устойчивое многообразие точки $\mathbf{x}^*$. Поэтому a_n выбирается так, что $\mathbf{q}_u\mathbf{x}_{n+1} = 0$. Теперь если точка $\mathbf{x}_{n+1}$ попала на устойчивое многообразие, то возмущение устремляется к нулю, и поэтому траектория будет притягиваться к неподвижной точке $\mathbf{x}^*$ со скоростью, определяемой величиной λ_s. Таким образом,

$$a_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_{u-1}}\,\frac{(\mathbf{x}_n\mathbf{q}_u)}{(\mathbf{g}\mathbf{q}_u)}. \tag{13}$$

Когда $a > a'$, то, допуская $\mathbf{g}\mathbf{q}_u \neq 0$, находим, что $a_n \neq 0$, только если $\mathbf{x}_n$ попадает в область $|\mathbf{x}_n\mathbf{q}_u| < \mathbf{x}'$. Следовательно, $\mathbf{x}' = a'\left|(1 - \lambda_u^{-1})\mathbf{g}\mathbf{q}_u\right|$. Таким образом, для малых a' типичное начальное условие для исходного отображения рождает хаотическую траекторию, качественно не отличающуюся от неконтролируемого случая до тех пор, пока $\mathbf{x}_n$ не попадет в эту область. Однако вследствие не учтенных в соотношении (13) нелинейностей даже в этом случае траектория не всегда может быть увлечена возмущением, чтобы управление было достижимо. Среднее время такого переходного процесса дается соотношением $\langle\tau\rangle \sim (a')^{-\beta}$, где $\beta = 1 + \ln|\lambda_u|/(2\ln|\lambda_s|^{-1})$.

Процедура стабилизации неустойчивых циклов является эффективной, когда траектория близка к нужному циклу. Но если она проходит вдали от требуемого положения, то может понадобиться достаточно долгое время, прежде чем контролирование окажется возможным. Если аттрактор эргодический, то практически любая окрестность оказывается достижимой. Однако когда аттрактор системы не эргодический и, например, включает устойчивые предельные циклы (т. е. является квазиаттрактором), то этот метод может быть применен только для стабилизации *некоторых* траекторий. Для преодоления этих трудностей было предложено использовать различные процедуры [74–77, 100], позволившие по-новому подойти к проблеме стабилизации неустойчивых циклов, а также разработать другие близкие по реализации способы контроля хаотических динамических систем [43, 44, 47, 57, 62, 88, 91, 101].

Хотя эти методы могут быть использованы достаточно широко (от стабилизации поведения систем химической кинетики до управления сокращениями сердечной мышцы [22, 30, 35, 42, 61, 78, 92, 102–105], обзоры по экспериментальным результатам см. в статьях [62, 63]), основной их недостаток сводится к тому, что, применяя их на практике, необходимо не только каждый раз задавать *положение* изображающей точки (что не всегда возможно), но и учитывать *уровень шума*, поскольку они оказываются весьма податливы к влиянию шумовых факторов [78]. Кроме того, описанные методы являются *силовыми*, и, следовательно, они далеко не всегда применимы. Чтобы избежать этих трудностей, нужно *исключить* обратную связь, т. е. рассмотреть *чисто мультипликативное* воздействие.

3. Подавление хаоса

Данный подход к проблеме управления хаотическими динамическими системами впервые был описан в работах [85–87], где для стабилизации хаотического поведения было предложено использовать простое периодическое возмущение *в области значений параметров A_c, отвечающих существованию хаоса*. Этот подход получил аналитическое обоснование в ряде последующих публикаций [25, 28, 66–69, 95, 106–108]. Сейчас этот метод удалось обобщить [24, 70–72], так что его использование дает возможность не только подавлять хаос, но и стабилизировать заранее заданные циклы, т. е. *управлять системой* (см. раздел 4).

3.1. Параметрическое возбуждение

Исследуем сначала динамические системы, которые не обладают хаотическим поведением, но в то же время *не имеют* нетривиальных устойчивых циклов. В контексте подавления хаоса проблема создания устойчивой динамики для таких систем может быть рассмотрена как предварительный шаг к построению последовательной теории стабилизации хаотического поведения для потоков.

Рассмотрим два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x}\left[x^4(1+2a) - \frac{1}{8}(1-a)\right] \tag{14}$$

и

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon \dot{x}(x^2 + ax + 1) \tag{15}$$

в области D_0, где D_0 имеет тот же смысл, что и в системе (2), ε и a — параметры. Будем полагать, что величина ε является достаточно малой, $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$. Системы (14) и (15) эквивалентны уравнениям вандерполевского типа, которые часто используются как математические модели различных радиофизических генераторов [84, 109–111].

Остановимся сначала на системе (14). Структура ее фазового пространства, которую можно установить, пользуясь методом усреднения, является несложной. Именно:

а) при $a < -1/2$ система (14) имеет один устойчивый фокус;

б) при $a \in (-1/2, 1)$ система (14) обладает устойчивым фокусом и неустойчивым предельным циклом (заметим, что в нулевом по ε приближении предельный цикл имеет радиус $R = [(1-a)/(1+2a)]^{1/4}$, и поэтому при a, близких к значению $-1/2$, цикл может не лежать в ограниченной области D_0);

в) при $a > 1$ система (14) имеет только один неустойчивый фокус.

Таким образом, ни при каких ограниченных значениях a система (14) *не* обладает устойчивыми предельными циклами. Однако ниже будет показано, что при определенных изменениях параметра a в данной системе возникают *устойчивые* периодические колебания, амплитуда которых не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Введем периодическое возмущение периода $T = 2\pi/\omega$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = \varepsilon y\left[x^4(1+2h\cos 2\omega\tau) - \frac{1}{8}(1-h\cos 2\omega\tau)\right] - x, \\ &\dot{\tau} = 1, \end{aligned} \tag{16}$$

где h — амплитуда возмущений, $\omega = 1/(1+\eta\varepsilon)^{1/2}$ и $\eta > 0$ является постоянной величиной. Уравнения (16) определены в ограниченной области $D = D_0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, содержащей начало координат и $D_0 \subset \mathbf{R}^n$. Теперь посредством замены переменных $\theta = \omega\tau$, $x = b\cos(\varphi+\theta)$ при условии $(db/d\theta)\cos(\varphi+\theta) - (d\varphi/d\theta)b\sin(\varphi+\theta) = 0$ приходим к системе уравнений для b и φ, усредняя которую за время T и оставляя только члены первого порядка по ε (иными словами, переходя к присоединенной системе), получим

$$\begin{aligned} &\frac{db}{d\theta} = \varepsilon B(b,\varphi) = \varepsilon\frac{b}{16}(b^4-1)(1+\frac{h}{2}\cos 2\varphi), \\ &\frac{d\varphi}{d\theta} = \varepsilon\Phi(b,\varphi) = \varepsilon\left[\frac{\eta}{2} + \frac{h}{32}(5b^4+1)\sin 2\varphi\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Хорошо известно, что стационарные решения b_0, φ_0 такой системы, т. е.

$$\begin{aligned} &B(b_0,\varphi_0) = \Phi(b_0,\varphi_0) = 0, \\ &\left.\frac{\partial(B,\Phi)}{\partial(b,\varphi)}\right|_{\substack{b=b_0,\\ \varphi=\varphi_0}} \neq 0, \end{aligned} \tag{18}$$

отвечают предельным циклам системы (16) в нулевом порядке теории возмущений, устойчивость которых совпадает с устойчивостью решений (18). Кроме того, бифуркационные значения параметра h в (17) с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадают с соответствующими значениями для системы (16).

Легко видеть, что система (18) кроме решения, отвечающего тривиальному циклу L_0^T, имеет еще три пары решений:

а) $b = 1$, $\sin 2\varphi = -8\eta/3h$, $\cos 2\varphi > 0$;

б) $b = 1$, $\sin 2\varphi = -8\eta/3h$, $\cos 2\varphi < 0$;

в) $b^4 = \left(16\eta(h^4-4)^{-1/2} - 1\right)/5$, $\cos 2\varphi = -2/h$, $\sin 2\varphi < 0$.

Таким образом, аналитически можно установить качественные изменения в динамике системы при увеличении амплитуды возмущений h. При этом эволюцию структуры разбиения фазового пространства системы (16) на траектории при изменении амплитуды h легко установить, пользуясь отображением Пуанкаре $\tau=0$. Такой анализ приводит к следующему.

1. При $h=0$ в системе (16) имеется тривиальный устойчивый предельный цикл L_0^T и неустойчивый инвариантный тор Tor^2. При изменении параметра h размеры этого тора меняются не более чем на величину первого порядка по ε.

2. При $h\in(0,\min(2,8\eta/3))$ на торе Tor^2 могут возникать седловые и неустойчивые предельные циклы периодов, больших T.

3. Если $h=h_1=2+\delta(D)$ (величина $\delta(D)>0$ введена в связи с конечностью области D_0), то кроме L_0^T и Tor^2 в области D имеется еще два устойчивых предельных цикла L_1^T и L_2^T периодов T. С ростом параметра h циклы L_1^T и L_2^T монотонно стягиваются к циклу L_0^T.

4. При $h=h_2=8\eta/3$ на торе Tor^2 рождаются две пары циклов периода T: два седловых, L_3^T и L_4^T, и два неустойчивых, L_5^T и L_6^T. Заметим, что если $\eta>3/4$, то случаи *3* и *4* необходимо поменять местами.

5. Когда $h=h_3=2\left[1+(4\eta/3)^2\right]^{1/2}$, происходит влипание устойчивых циклов L_1^T и L_2^T в седловые L_3^T и L_4^T соответственно с передачей им своей устойчивости. Сами же циклы L_1^T и L_2^T становятся седловыми.

6. При $h=h_4=2\left[1+(8\eta)^2\right]^{1/2}$ циклы L_1^T и L_2^T влипают в тривиальный цикл L_0^T, делая его седловым.

7. В случае $h>h_4$ в системе (16) существуют седловой цикл L_0^T, устойчивые циклы L_3^T и L_4^T и неустойчивые циклы L_5^T и L_6^T.

Таким образом, используя метод параметрических возмущений, можно получить *устойчивые* предельные циклы в системе (14). Но из-за присутствия неустойчивых предельных циклов областью притяжения L_3^T и L_4^T является не вся область D.

Рассмотрим теперь систему (15). Теми же методами легко установить, что для любого ограниченного значения параметра a она имеет только единственный устойчивый фокус. Вводя параметрическое возмущение, можно установить, что в этой системе тривиальный цикл L_0^T всегда устойчив, и при значениях $h^2<h_1^2=8\left[1+(1+\eta^2)^{1/2}\right]$ других траекторий она не имеет. При $h^2=h_1^2$ в системе (15) происходит бифуркация рождения трех пар предельных циклов: трех устойчивых и трех седловых. В сечении Пуанкаре плоскостью $\tau=0$ это выглядит как появление трех седло-узлов, каждый из которых затем распадается на седло и устойчивый узел. При этом расстояние от начала координат вычисляется как

$$\rho^2_{\mathrm{saddle}}=\frac{h^2-8-\sqrt{h^4-16h^2-64\eta^2}}{2}+O(\varepsilon),$$

$$\rho^2_{\mathrm{stable}}=\frac{h^2-8+\sqrt{h^4-16h^2-64\eta^2}}{2}+O(\varepsilon).$$

Следовательно, при $h>h_1$ в системе (15) вместе с тривиальным L_0^T существуют четыре устойчивых предельных цикла.

З а м е ч а н и е 1. В силу присутствия малого параметра ε из полученных результатов следует, что чем ближе модуль мультипликатора неустойчивого предельного цикла к единице, тем меньше по амплитуде может быть параметрическое воздействие, которое необходимо приложить к системе для рождения устойчивых предельных циклов.

З а м е ч а н и е 2. Аналогичный изложенным выше результат легко получить для определенных систем *любой* размерности. Например, для систем, представимых как прямое произведение (14) или (15) и уравнений типа $\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{W}\mathbf{z}$, где $\mathbf{W}$ — матрица, имеющая собственные значения с отрицательными действительными частями, существует параметрическое возмущение, приводящее к появлению *устойчивых* периодических движений.

З а м е ч а н и е 3. Если $\varepsilon\to0$, то расстояние ρ не стремится к нулю. Это означает, что для достаточно малых ε устойчивые периодические решения имеют *конечную* амплитуду.

Таким образом, для определенного класса динамических систем, которые в автономном случае *не* обладают устойчивой динамикой, возможно найти параметрические возмущения, выводящие их на режим устойчивых периодических колебаний.

Для обоснования возможности *подавления хаоса* рассмотрим два семейства одномерных унимодальных отображений: семейство квадратичных отображений, $T_a:[0,1]\to[0;1]$, частным случаем которого является хорошо известное логистическое отображение

$$T_a: x\longmapsto\varphi(x,a)=ax(1-x), \tag{19}$$

где $a\in(0,4]=A$, и семейство экспоненциальных отображений, $\mathcal{T}_a:I\to I$,

$$\mathcal{T}_a: x\longmapsto\chi(x,a)=a\exp[a(1-x)], \tag{20}$$

где $a\neq0$. Эти семейства широко используются как модели многих физических, химических и других систем и поэтому привлекают большое внимание исследователей (см., напр., [7, 84, 112–116]). Так, отображение (20) естественным образом возникает при исследовании ряда колебательных химических реакций. Более того, любое унимодальное отображение является полусопряженным квадратичному, и поэтому семейство (19) играет важную роль в теории унимодальных отображений.

Для того чтобы доказать, что хаотическое поведение, проявляемое отображениями (19) и (20), возможно стабилизировать параметрическим воздействием, каждому периодическому возмущению с периодом τ параметра a, $a_{i+1}=g(a_i)$, $i=1,2,\ldots,\tau-1$, $a_1=g(a_\tau)$, $a_i\neq a_j$ для $i\neq j$ ($a_i\in A$, $i=1,2,\ldots,\tau$), поставим в соответствие вектор $\hat a=(a_1,\ldots,a_\tau)$ из пространства $\mathbf{R}^\tau$. Тогда можно рассмотреть множество $\mathbf{A}=\Big\{\hat a\in\underbrace{A\otimes A\otimes\cdots\otimes A}_{\tau\ \text{раз}}\colon\ \hat a=(a_1,\ldots,a_\tau),\ a_i\neq a_j,$ $1\leqslant i,j\leqslant\tau,\ i\neq j,\ a_1,\ldots,a_\tau\in A\Big\}$, $\mathbf{A}\subset\mathbf{R}^\tau$, отвечающее *всевозможным* периодическим возмущениям периода τ, оперирующим в A. Далее, следуя п. 1.2, возмущенные квадратичное и экспоненциальное семейства перепишем как

$$\mathbf{T}_a=\begin{cases} x\longmapsto\varphi(a,x),\\ a\longmapsto g(a)\end{cases}\tag{21}$$

и

$$\mathcal{T}_a=\begin{cases} x\longmapsto\chi(a,x),\\ a\longmapsto g(a),\end{cases}\tag{22}$$

где $a_{i+1}=g(a_i)$, $i=1,2,\ldots,\tau-1$, $a_1=g(a_\tau)$, $a_i\neq a_j$, $i\neq j$. Для подмножества A_c параметрических значений a, соответствующих хаотическому поведению отображений, множество $\mathbf{A}_c=\Big\{\hat a\in\underbrace{A_c\otimes A_c\otimes\cdots\otimes A_c}_{\tau\ \text{раз}}\colon\ \hat a=(a_1,\ldots,a_\tau),$ $a_i\neq a_j,\ 1\leqslant i,j\leqslant\tau,\ i\neq j,\ a_1,\ldots,a_\tau\in A_c\Big\}$ будет отвечать любым возмущениям периода τ, оперирующим в A_c. Теперь можно показать [66–68, 96], что существует подмножество $\mathbf{A}_d\subset\mathbf{A}_c$ такое, что если $\hat a\in\mathbf{A}_d$, то возмущенные отображения (21), (22) будут обладать устойчивыми циклами конечных периодов. Доказательство данного утверждения проводится путем построения подмножества $\mathbf{A}_d$ и нахождения устойчивых циклов в отображениях (21), (22).

Таким образом, периодические параметрические возмущения *на* хаотическом множестве приводят к подавлению хаоса. При этом, очевидно, множество параметрических значений $\hat a\in\mathbf{A}$, для которых в периодически возмущаемых семействах (21), (22) существуют устойчивые циклы, открыто в $\mathbf{A}$.

Идея подавления хаоса простым параметрическим воздействием рассматривалась многими авторами [38, 40, 42, 48, 51, 52, 59, 73] (см. также обзоры [36, 37]). В частности, были развиты довольно эффективные методы резонансной стабилизации [38, 40, 48] и методы высокочастотной (нерезонансной) стабилизации [52] хаотического поведения.

3.2. Методы резонансной и высокочастотной стабилизации

Для теоретического обоснования методов резонансной и высокочастотной стабилизации используется обобщенная теория Мельникова [117] (см. также [7, 112, 118]), заключающаяся в оценке расстояния между устойчивой и неустойчивой сепаратрисами. В бифуркационном случае устойчивая и неустойчивая сепаратрисы образуют гомоклиническую петлю. При разрушении такой гомоклинической структуры возможны три случая: выходящая сепаратриса окружает входящую; входящая сепаратриса окружает выходящую; сепаратрисы пересекаются. В первых двух случаях расстояние Δ между сепаратрисами соответственно $\Delta<0$ и $\Delta>0$ для любого момента времени. И если только найдется момент t_0, когда Δ *меняет знак*, возникает хаотическое поведение.

Рассмотрим уравнение Дюффинга–Холмса [119] (соответствующие ссылки см. в работах [84, 109, 112, 118]) с параметрическим возмущением:

$$\begin{aligned}&\dot x=y,\\ &\dot y=x-\beta\Big[1+\eta\cos(\Omega t)\Big]x^3-\delta y+\gamma\cos\omega t,\end{aligned}\tag{23}$$

где η — амплитуда и Ω — частота параметрического возмущения. Согласно [112], расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями в момент времени t_0 для невозмущенного уравнения (23) дается выражением

$$\Delta(t_0)=2\pi\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}\gamma\omega\,\mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\sin(\omega t_0)+\frac{4\delta}{3\beta}.$$

Нетрудно рассчитать это расстояние для уравнения (23):

$$\begin{aligned}\Delta(t_0)=\frac{2\sqrt2}{\sqrt\beta}\pi\gamma\omega\,\mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\sin(\omega t_0)+\frac{4\delta}{3\beta}+\\ +\frac{\pi\eta}{6\beta}(\Omega^4-6\Omega^2+1)\,\mathrm{csch}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)\sin(\Omega t_0),\end{aligned}$$

или, вводя соответствующие обозначения, $\Delta(t_0)=A(\omega)\sin(\omega t_0)+B(\Omega)\sin(\Omega t_0)+C$. Для того чтобы величина Δ оставалась положительной для всех t_0, необходимо выполнение неравенства

$$\eta>\left|\frac{6\beta(A(\omega)-C)}{\pi(\Omega^4-6\Omega^2+1)\,\mathrm{csch}(\pi\Omega/2)}\right|.$$

Однако это условие не является достаточным. Оно будет таковым, если частоты Ω и ω соизмеримы. Более того, если отношение Ω/ω иррационально, то существует значение t_0, при котором $\Delta(t_0)$ меняет знак. При этом период времени τ, в течение которого происходит двойная смена знака, можно определить из соотношения $A(\omega)-B(\Omega)-C\simeq 0$, которое гарантирует выполнение условия касания сепаратрис. Величина τ в зависимости от Ω претерпевает скачки в точках, где частоты Ω и ω являются соизмеримыми. Используя численное моделирование, можно убедиться, что хаос подавляется на частотах $\Omega \sim \Omega_R^{(k)} \equiv k\Omega_R^{(1)}$, где $\Omega_R^{(k)}$ — гармоники частоты возбуждения ω уравнения (23).

Таким образом, стабилизация хаотической динамики в уравнении Дюффинга–Холмса наблюдается при резонансном соотношении частоты внешнего параметрического возмущения и частоты силовой составляющей.

Если параметрическое возмущение уравнения Дюффинга–Холмса ввести иначе,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a(t)x - \beta x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t, \end{aligned} \tag{24}$$

где $a(t) = a(1 + \eta \cos \Omega t)$, то для наблюдения стабилизации хаотической динамики можно использовать высокочастотное возбуждение [52], когда частота Ω достаточно велика по сравнению с частотой ω. Аналогичная идея, позволившая найти условия стабилизации перевернутого маятника посредством быстрых колебаний подвеса, была описана еще в 1951 г. [120, 121]. Основная идея (как для маятника, так и для уравнения Дюффинга–Холмса) состоит в том, чтобы разделить быстрые ξ и медленные X переменные. В этом случае, полагая, что функция $x(t)$ представляется композицией $x = X + \xi$, $\langle x \rangle = X$, удается получить уравнение для X. Перейдем от уравнения (24) с параметрическим возмущением к уравнению для фурье-компонент, полагая $\xi = \eta(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) + \eta(C \cos 2\Omega t + D \sin 2\Omega t) + \ldots$. Тогда получим неограниченное число сцепленных нелинейных уравнений:

$$\ddot{X} - aX + \beta X^3 + \frac{3}{2}\eta^2 \beta X(A^2 + B^2 + \cdots) - \frac{1}{2}a\eta^2 A = -\delta \dot{X} + \gamma \cos \omega t,$$

$$(-\Omega^2 A + \Omega \dot{B} + \ddot{A}) - aX + \delta(\dot{A} + \Omega B) - \beta(3X^2 A + \frac{3}{4}\eta^2 A^3 + \cdots) = aX,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В свою очередь, эти уравнения допускают исследование методом асимптотического разложения функций $A, B, \ldots$. Используя этот факт и опуская промежуточные выкладки, в первом приближении получим так называемое ренормализованное уравнение Дюффинга–Холмса:

$$\ddot{X} - \tilde{a}X + \beta X^3 = -\delta \dot{X} + \gamma \cos \omega t,$$

где $\tilde{a} = a(1 - a\eta^2/2\Omega^2)$. Для этого уравнения расстояние между сепаратрисами дается выражением

$$\Delta(t_0) = \pi\omega\gamma \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} \operatorname{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\tilde{a}}}\right) \sin \omega t_0 + \frac{4\delta\tilde{a}^{3/2}}{3\beta},$$

а условие сохранения его знака определяется из неравенства

$$\delta > \frac{3\pi\gamma\sqrt{\beta}\omega}{(2\tilde{a})^{3/2}} \operatorname{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\tilde{a}}}\right). \tag{25}$$

Следовательно, если $\tilde{a}$ достаточно мало, то выражение (25) легко выполняется и должно наблюдаться подавление хаоса.

Неоспоримым преимуществом описанных в данной главе методов является то, что они позволяют развить аналитический подход. Однако ни один из них не дает возможность *управлять* системами с неустойчивым или хаотическим поведением. Тем не менее если усовершенствовать внешние возмущения, то нетрудно добиться полного контроля над динамикой системы.

4. Подавление хаоса и стабилизация заданных циклов

В этом разделе будет показано, что для управления определенными системами с неустойчивым или хаотическим поведением и вывода их на требуемый режим эволюции необходимо использовать специально подобранные параметрические возмущения. Такие возмущения — результат решения обратной задачи, когда неизвестными являются параметры, которые можно найти как решения уравнений на заданный цикл.

4.1. Кусочно-линейное отображение и отображение с гиперболическим аттрактором

Исследуем сначала задачу управления и подавления хаоса для достаточно общих семейств отображений [68, 69, 96]. На примере этих семейств будет ясно видно, что при помощи простого периодического параметрического возмущения без обратной связи вида (5) удается не просто подавить хаос, но и стабилизировать циклы, которые *уже существовали* как неустойчивые в первоначальном (невозмущенном) отображении.

Рассмотрим семейство отображений интервала $[0, 1]$ в себя:

$$T_a : x \longmapsto f(x, a) = \begin{cases} q(a)x + r(a), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ p(a)(1 - x), & a < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{26}$$

где $a \in (0, 1)$ — управляющий параметр и $q(a) = (1 - a)\Big/\Big(a(2 - a)\Big)$, $r(a) = 1/(2 - a)$, $p(a) = 1/(1 - a)$. Основная особенность семейства (26) состоит в том, что при $a = 1/2$ оно сопряжено с семейством квадратичных отображений на интервале $[\varphi^2(1/2), \varphi(1/2)]$. Нетрудно показать, что для любого $a \in (0, 1)$ отображение T_a (26) имеет перемешивающий аттрактор $\Lambda = [0, 1]$. Существование перемешивающего аттрактора является достаточно сильным свойством: отображения с таким свойством не обладают устойчивыми циклами и имеют чувствительную зависимость от начальных условий. Более того, для отображений с перемешивающим типом аттрактора возможно построить абсолютно непрерывную инвариантную меру (см. [1]).

Рассмотрим возмущенное семейство (26). Для простоты ограничимся случаем двухпериодического преобразования параметра a. В этом случае

$$\begin{cases} T_1 : x \longmapsto F_1(x) \equiv T_{a_2} \circ T_{a_1}, \\ T_2 : x \longmapsto F_2(x) \equiv T_{a_1} \circ T_{a_2}. \end{cases} \tag{27}$$

Без потери общности будем полагать, что $0 < a_1 < a_2 < 1$. Введем следующие обозначения: $a_1 = a, \quad a_2 = a + \epsilon, \quad \epsilon > 0$. Легко понять, что отображение T_1 имеет три неподвижные точки, которые существуют для любых значений параметров $a_1, a_2 \in (0,1)$. Эти неподвижные точки соответствуют трем различным циклам периода 2 возмущенного отображения (27). Цикл, соответствующий одной из этих точек, возникает из неподвижной точки невозмущенного отображения (26), а два других цикла (периода 2), отвечающие остальным двум неподвижным точкам, рождаются от цикла периода 2.

Можно найти такие параметрические значения, что эти последние точки становятся устойчивыми. Действительно, $|q_1 p_2| = (1-a)\Big/\Big(a(2-a)(1-a-\epsilon)\Big)$, $|q_2 p_1| = (1-a-\epsilon)\Big/\Big((a+\epsilon)(2-a-\epsilon)(1-\epsilon)\Big)$. Теперь, вводя обозначения $|q_1 p_2| \equiv s_1(\epsilon)$ и $|q_2 p_1| \equiv s_2(\epsilon)$, рассмотрим функции $s_1(\epsilon)$, $s_2(\epsilon)$ в области $0 < \epsilon < 1-a$. Из их анализа следует, что для любого $a \in (0,1)$ существует диапазон значений параметра $\epsilon \in (\epsilon^*, 1-a)$, где $s_2(\epsilon) < 1$. Другими словами, в интервале $(\epsilon^*, 1-a)$ возмущенное отображение (27) имеет *стабилизированный* двухпериодический цикл, и почти все фазовые точки из интервала $[0,1]$ будут притягиваться к нему. Необходимо отметить, что этот цикл уже существовал как *неустойчивый* в первоначальном (невозмущенном) отображении (26). Его можно *сделать устойчивым* посредством непрерывного изменения параметров отображения (27) от значений (a_1, a_1) к значениям (a_1, a_2), так что $s_2(a_1, a_2) < 1$.

Подробные аналитические исследования показывают, что для более сложного управления семейством (26) необходимо использовать специфические возмущения [96]. Именно: посредством надлежащего возмущения удается стабилизировать неустойчивый цикл произвольного нечетного периода.

Рассмотрим теперь обобщение полученных результатов на определенный класс *двумерных* отображений, обладающих наиболее сильными хаотическими свойствами. В качестве примера изучим так называемое отображение Белых. Это отображение естественным образом возникает при исследовании некоторых конкретных радиофизических моделей [122]. Математически отображение Белых вводится следующим образом. Пусть $Q = \{(x,y)\colon |x| < 1, \quad |y| < 1\}$ — квадрат на плоскости (x,y). Рассмотрим преобразование

$$T:\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \tag{28}$$

такое, что

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\lambda_1(x+1)-1, \quad \dfrac{1}{\lambda_2}(y+1)-1\right), \\ \qquad\qquad (x,y) \in Q_1, \\ \left(\lambda_3(x-1)+1, \quad \dfrac{1}{\lambda_4}(y-1)+1\right), \\ \qquad\qquad (x,y) \in Q_2, \end{cases} \tag{29}$$

где области Q_1, Q_2 получаются разделением исходного квадрата Q некоторой функцией $h(x) : [-1,1] \to [-1,1]$ на две части:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y) \in Q :\ y < h(x)\}, \\ Q_2 &= \{(x,y) \in Q :\ y > h(x)\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Кроме того, допустим, что постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и функция $h(x)$ выбраны так, что под действием преобразования T квадрат Q отображается в себя, $TQ \subset Q$. Полученная конструкция (28)–(30) называется *отображением Белых*.

Для дальнейшего рассмотрения ограничимся в (30) линейной функцией вида $h(x) = ax$ и выберем постоянные λ_i следующим образом: $\lambda_1 = \lambda_3$, $1/\lambda_2 = 1/\lambda_4 \equiv \lambda_2$. Тогда отображение Белых можно записать в виде

$$T\colon\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \Big(\lambda_1(x+1)-1, \quad \lambda_2(y+1)-1\Big), \\ \qquad\qquad y < ax, \\ \Big(\lambda_1(x-1)+1, \quad \lambda_2(y-1)+1\Big), \\ \qquad\qquad y > ax, \end{cases} \tag{31}$$

$|a| < 1$. Отображение (31) замечательно тем, что оно обладает аттрактором гиперболического типа. Известно, что если множество Λ является аттрактором для диффеоморфизма $T : Q \to Q$ компактного многообразия Q, то существует (открытая) окрестность, которая сжимается к Λ с увеличением итераций. Свойство гиперболичности для отображений означает, что в любой точке p аттрактора Λ имеется два инвариантных направления. Вдоль одного из них точки компакта Q экспоненциально стремятся к p, а вдоль другого экспоненциально быстро уходят от точки p. Это свойство позволяет построить устойчивое и неустойчивое подмногообразия многообразия Q. В свою очередь, существование устойчивого и неустойчивого многообразий подразумевает наличие у отображения чувствительной зависимости от начальных условий. Более того, отображения с гиперболическим типом аттрактора обладают инвариантными мерами, которые позволяют установить статистические свойства типичных траекторий.

Отображение Белых (31), однако, не может быть гиперболическим в строгом смысле, поскольку оно разрывно. Тем не менее это отображение является типичным представителем динамических систем с особенностями. Такой тип отображений может появиться во многих физических задачах. При условии, что множество точек разрыва имеет нулевую меру, и при некоторых других допущениях (см. [123]) можно получить строгие результаты, касающиеся разрывных динамических систем. В частности, для каждой регулярной точки возможно сформировать устойчивое и неустойчивое многообразия. Кроме того, опираясь на конкретный вид множества точек разрыва, удается построить эргодическую инвариантную меру.

Нетрудно найти условия существования гиперболического аттрактора для отображения Белых [96]. Для этого, во-первых, заметим, что при $|a|<1$ это отображение имеет две неподвижные точки, $X=(1,1)$ и $Y=(-1,-1)$. Во-вторых, для всех точек квадрата, где определено отображение (31), производная равна $\mathrm{D}f=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2\}$. Для гиперболичности необходимо, чтобы $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|>1$ (или наоборот) и $TQ\subset Q$. Легко проверить, что последнее неравенство удовлетворяется, если только $0<\lambda_1<1$, $0<\lambda_2<2/(1+|a|)$, $|a|<1$. Наконец, для выполнения условия существования аттрактора гиперболического типа требуется, чтобы преобразование T было взаимно однозначным. Это требование автоматически удовлетворяется, если $0<\lambda_1<1/2$. Следовательно, для гиперболичности аттрактора в отображении Белых (31) получим следующую систему неравенств:

$$0<\lambda_1<1/2;\quad 1<\lambda_2<2/(1+|a|);\quad |a|<1. \tag{32}$$

Для того чтобы рассмотреть возможность подавления хаоса в отображении (31) с условием (32), необходимо прежде его обобщить на случай $|a|>1$. При выполнении этого неравенства неподвижная точка X попадает уже в область $y<ax$, а точка Y — в область $y>ax$. Поэтому для существования этих неподвижных точек при $|a|>1$ необходимо переписать отображение Белых как

$$T:\ (x,y)\longmapsto\begin{cases}\Big(\lambda_1(x+1)-1,\quad \lambda_2(y+1)-1\Big), & y>ax,\\ \Big(\lambda_1(x-1)+1,\quad \lambda_2(y-1)+1\Big), & y<ax.\end{cases} \tag{33}$$

Таким образом, новое отображение (33) получается из исходного отображения (31) посредством замены $x\leftrightarrow y$ и $a=1/a'$. Значит, условия гиперболичности для обобщенного отображения Белых (33) будут выполнены при

$$0<\lambda_2<1/2;\quad 1<\lambda_1<2/(1+1/|a|);\quad |a|>1. \tag{34}$$

Отметим, что теперь, в отличие от отображения (34), $|\lambda_2|<1$ и $|\lambda_1|>1$. Иными словами, сжимающее и растягивающее направления меняются местами.

Пусть параметр a отображения Белых циклически возмущается с периодом 2. Для того чтобы найти качественное изменение в динамике такого отображения, необходимо переключать параметр a вблизи значения $a=1$ таким образом, чтобы $a_1<1$, $a_2>1$. Кроме того, условия гиперболичности для возмущенного отображения выполняются как при $a_1<1$, так и при $a_2>1$, только если изменяются также и параметры λ_1, λ_2. Учитывая эти условия, можно переписать возмущенное отображение Белых следующим образом:

$$\mathbf{T}=\begin{cases}(x,y)\longmapsto f(a_2,\lambda_1^2,\lambda_2^2)\circ f(a_1,\lambda_1^1,\lambda_2^1)(x,y),\\ (x,y)\longmapsto f(a_1,\lambda_1^1,\lambda_2^1)\circ f(a_2,\lambda_1^2,\lambda_2^2)(x,y)\end{cases} \tag{35}$$

для четных и нечетных итераций соответственно.

Далее, поскольку как для $a_1<1$, так и для $a_2>1$ отображение Белых имеет неподвижные точки $X=(1,1)$ и $Y=(-1,-1)$, то эти точки останутся неподвижными также и для отображения (35). Более того, дифференциал $\mathrm{D}\bar{T}$ возмущенного отображения (в случае четных и нечетных итераций) определяется как

$$\mathrm{D}\bar{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^1 & 0\\ 0 & \lambda_2^1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^2\lambda_1^1 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\lambda_2^1\end{pmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}\lambda_1^* & 0\\ 0 & \lambda_2^*\end{pmatrix}.$$

Поэтому, вследствие того что для $a_1<1$ выполняются неравенства $0<\lambda_1^1<1/2$, $1<\lambda_2^1<2/(1+|a_1|)$ и $1<\lambda_1^2<1/(1+1/|a_2|)$, $0<\lambda_2^2<1/2$ при $a_2>1$, собственные значения λ_1^* и λ_2^* матрицы $D\bar{T}$ будут изменяться в диапазоне $0<\lambda_1^*<1/(1+1/|a_2|)$, $0<\lambda_2^*<1/(1+|a_1|)$. Иначе говоря, $|\lambda_1^*|<1$, $|\lambda_2^*|<1$ и неподвижные точки X,Y отображения (33) становятся *устойчивыми*. Это означает, что гиперболический аттрактор вырождается и сменяется простым аттрактором.

Таким образом, циклические параметрические возмущения отображений с ярко выраженными хаотическими свойствами приводят к качественному изменению в динамике: из хаотических они преобразуются в регулярные, обладающие стабилизированными неподвижными точками или циклами.

4.2. Отображения с критическими точками

Опишем теперь практически реализуемый метод поиска возмущений, приводящих к стабилизации заранее выбранных циклов (частично его описание дано в работе [24]). Он позволяет осуществить *полный контроль* над динамикой систем, которые эффективно описываются, например, унимодальными отображениями.

Пусть отображение $T_a: x \mapsto f(x,a)$, $x \in M$, $a \in A$, удовлетворяет следующим свойствам:

1) существует такое подмножество $\sigma \subset M$, что для любых $x_1, x_2 \in \sigma$ найдется значение $a^* \in A$, для которого $f(x_1, a^*) = x_2$;

2) существует критическая точка $x_c \in \sigma$ такая, что $\partial f(x,a)/\partial x\Big|_{x=x_c} \equiv \mathrm{D}_x f(x_c, a) = 0$ при любом $a \in A$.

Тогда для любых $x_2, x_3, \ldots, x_\tau \in \sigma$ найдутся такие x_1 и $a_1, a_2, \ldots, a_\tau$, что цикл $(x_1, x_2, \ldots, x_\tau)$ будет устойчивым циклом возмущенного отображения $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_\tau)$.

Действительно, выберем произвольные величины $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$. В силу условия *1* система уравнений $f(x_1, a_1) = x_2$, $f(x_2, a_2) = x_3, \ldots, f(x_\tau, a_\tau) = x_1$ относительно параметрических значений $a_1, a_2, \ldots, a_\tau$ имеет решение вида $\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$. Это означает, что последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_\tau) = p$ является циклом периода τ отображения $\mathbf{T}_a$ при периодическом возмущении $\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$. Чтобы этот цикл p сделать устойчивым, достаточно выбрать элемент x_1 близким к критическому значению x_c, поскольку $\beta(p) = \prod\limits_{i=1}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x_i, a_i)$ и $\mathrm{D}_x f(x_c, a) = 0$ при любом a. Это гарантирует выполнение условия устойчивости $|\beta(p)| < 1$.

Очевидно, условиям *1*, *2* удовлетворяют семейства полимодальных отображений. Поскольку любой цикл вида $(x_c, x_2, x_3, \ldots, x_\tau)$ при произвольных $x_i \in \sigma$ является устойчивым, то приведенное утверждение позволяет практически использовать данный метод управления динамикой систем, которые эффективно описываются такими семействами.

Нетрудно найти условия на уровень внешнего шума, который не разрушил бы стабилизированные циклы. Пусть устойчивому циклу $(x_c, x_2, x_3, \ldots, x_\tau)$ соответствует возмущение $(a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$. Предположим, что значения a_i слегка изменились: $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_\tau) = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \ldots, a_\tau + \Delta a_\tau)$, $|\Delta a_i| \leqslant \delta_a$. Найдем максимально допустимое значение δ_a, при котором возмущенный цикл сохраняет устойчивость, и исследуем, как в этом случае исказится цикл, т. е. определим Δx_i для $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_\tau) = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_\tau + \Delta x_\tau)$. Результаты таких вычислений даются следующей точной оценкой.

Допустим, что $f(x,a) \in C^2[M \times A]$ и возмущенное отображение $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$ имеет устойчивый цикл периода τ, $p = (x_1, x_2, \ldots, x_\tau)$. Тогда если

$$|\Delta a_i| \leqslant \delta_a = \frac{1}{t S_a L S_x^{\tau-1} \sum\limits_{i=1}^{\tau} S_x^i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, \tau$, $S_a = \max\limits_{x,a} |\mathrm{D}_a f(x,a)|$, $L = \max\limits_{x,a} |\mathrm{D}_x^2 f(x,a)|$, $S_x = \max\limits_{x,a} |\mathrm{D}_x f(x,a)|$, то это отображение имеет также устойчивый цикл $p' = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_\tau + \Delta x_\tau)$ периода τ при $\hat{a}' = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \ldots, a_\tau + \Delta a_\tau)$ и

$$|\Delta x_i| \leqslant \delta_x = \frac{1}{L S_x^{\tau-1}}.$$

Действительно, предположим, что все значения a_i являются возмущенными, $a'_i = a_i + \Delta a_i$. Найдем изменение $\Delta x_1 = x'_1 - x_c$. При этом x'_1 должно быть неподвижной точкой отображения T_1 (см. (8)), т. е. $x'_1 = F_1(x'_1, a'_1, a'_2, \ldots, a'_\tau)$. Тогда $x_c + \Delta x_1 = F_1(x_c, a_1, a_2 \ldots, a_\tau) + \mathrm{D}_x F_1(x_c, \hat{a}) \Delta x_1 + \sum\limits_{i=1}^{\tau} \mathrm{D}_{a_i} F_1(x_c, \hat{a}) \Delta a_i$. Отсюда с учетом соотношений $x_c = F_1(x_c, \hat{a})$ и $\mathrm{D}_x F_1(x_c, \hat{a}) = \beta(p) = 0$ находим, что $\Delta x_1 = \sum\limits_{i=1}^{\tau} \prod\limits_{l=i+1}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x_l, a_l) \mathrm{D}_a f(x_i, a_i) \Delta a_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Delta x_1| &\leqslant \delta_a \sum_{i=1}^{\tau} \prod_{l=i+1}^{\tau} \Big|\mathrm{D}_x f(x_l, a_l)\Big| \Big|\mathrm{D}_a f(x_i, a_i)\Big| \leqslant \\ &\leqslant \delta_a \tau S_a \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i. \end{aligned} \tag{36}$$

Оценим, как при этом изменится мультипликатор цикла: $\beta(p') - \beta(p) = \beta(p') = \prod\limits_{i=1}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x'_i, a'_i) = \sum\limits_{i=1}^{\tau} \mathrm{D}_x^2 f(x_i, a_i) \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x_l, a_l) \Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{\tau} \mathrm{D}_{ax}^2 f(x_i, a_i) \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x_l, a_l) \Delta a_i$. В обеих суммах ненулевыми являются только первые члены, поскольку $\mathrm{D}_x f(x_1, a_1) = \mathrm{D}_x f(x_c, a_1) = 0$. Поэтому $\beta(p') = \Big[\mathrm{D}_x^2 f(x_c, a_1) \Delta x_1 + \mathrm{D}_{ax}^2 f(x_c, a_1) \Delta a_1\Big] \times \prod\limits_{l=2}^{\tau} \mathrm{D}_x f(x_l, a_l)$. Однако очевидно, что $\mathrm{D}_{ax}^2 f(x_c, a_1) = \mathrm{D}_a \Big(\mathrm{D}_x f(x_c, a)\Big)\Big|_{a=a_1} = \mathrm{D}_a(0) = 0$. Значит, $|\beta(p')| = |\Delta x_1| \Big|\mathrm{D}_x^2 f(x_c, a_1)\Big| \prod\limits_{l=2}^{\tau} \Big|\mathrm{D}_x f(x_l, a_l)\Big|$. Для устойчивости цикла необходимо выполнение неравенства

$$|\Delta x_1|\left|\mathrm{D}_x^2 f(x_c, a_1)\right| \prod_{l=2}^{\tau}\left|\mathrm{D}_x f(x_l, a_l)\right| \leqslant |\Delta x_1| L S_x^{\tau-1} < 1.$$

Отсюда следует, что $|\Delta x_1| \leqslant \delta_x = 1/(L S_x^{\tau-1})$.

Таким образом, если возмущение Δx_1 будет меньше величины δ_x, то цикл останется устойчивым. Но максимальное изменение Δx_1 при возмущении параметров на величину δ_a задается неравенством (36). Поэтому условие на δ_a можно записать как $\delta_a \tau S_a \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i = 1/(L S_x^{\tau-1})$ или

$$\delta_a = \frac{1}{t S_a L S_x^{\tau-1} \sum\limits_{i=1}^{\tau} S_x^i}.$$

Полученные оценки позволяют в каждом конкретном случае эффективно находить предельно допустимые ошибки в задании необходимых управляющих параметров.

Рассмотрим в качестве примера хорошо изученное семейство (19). Для данного отображения множество σ — это интервал $[x_b, x_e]$, где x_b и x_e — решение уравнения $x_{\text{int}} = f(x, 4)$, x_{int} — точка пересечения дуг $y = 4x(1-x)$ и $y = x$, т. е. $[x_b, x_e] = [1/4, 3/4]$. Найдем возмущения $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$, при которых в отображении (19) существует устойчивый цикл того или иного периода t, кратного периоду возмущения τ.

Запишем возмущенное отображение следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n (1 - x_n), \\ a_n = a_{n \,(\mathrm{mod}\, \tau+1)}. \end{cases} \tag{37}$$

Если это отображение имеет цикл p периода t, равного периоду возмущения, $t = \tau$, $p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$, то точки, формирующие этот цикл, будут подчиняться следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 x_1 (1 - x_1), \\ x_3 &= a_2 x_2 (1 - x_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_1 &= a_t x_t (1 - x_t). \end{aligned} \tag{38}$$

Чтобы решить обратную задачу, т. е. найти значения параметров, при которых отображение (37) имеет заданный цикл p, необходимо выразить значения a_i из системы (38) как

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2}{x_1(1 - x_1)}, \\ a_2 &= \frac{x_3}{x_2(1 - x_2)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_t &= \frac{x_1}{x_t(1 - x_t)}. \end{aligned} \tag{39}$$

Ясно, что не для всех возможных $x_i \in (0;1)$ полученные значения $a_i \in [0;4]$. Однако если это верно, то для любого цикла $p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ можно найти значения параметров $(a_1, a_2, \dots, a_t)$, для которых возмущенное отображение (37) имеет такой цикл. Если мультипликатор $|\beta(p)| = \left|\prod\limits_{i=1}^{t} a_i(1 - 2x_i)\right| < 1$, то данный цикл устойчив. С учетом уравнений (39) это приводит к условию

$$|\beta(p)| = \left|\prod_{i=1}^{t} \frac{x_{i+1}}{x_i(1 - x_i)}(1 - 2x_i)\right| = \left|\prod_{i=1}^{t} \frac{1 - 2x_i}{1 - x_i}\right| < 1. \tag{40}$$

Когда среди точек цикла существует критическая точка $x_c = 1/2$, то $(1 - 2x_c)/(1 - x_c) = 0$. В этом случае неравенство (40) выполнено и такой цикл устойчив.

Множество значений $p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$, для которых $a_i \in [0;4]$ и неравенство (40) выполнено, образует определенную область в координатном пространстве $\mathbf{R}^t$. Каждой точке этой области соответствует устойчивый цикл возмущенного отображения. Используя систему уравнений (39), можно получить соответствующую область в *параметрическом* пространстве $\mathbf{R}^t$. Рассмотрим значение $\tau = 2$. Тогда (см. выше) циклы возмущенного отображения (37) могут иметь периоды только $t = \tau k$ при некотором целом k. Исследуем области существования таких устойчивых циклов в координатном и параметрическом пространствах при $k = 1, 2, 3$.

I. Случай $k = 1$. Тогда период возмущения $\tau = 2$ совпадает с периодом устойчивого цикла $t = \tau = 2$. Легко видеть, что в пространстве (x_1, x_2) область существования устойчивого цикла определяется следующей системой неравенств:

$$0 < \frac{x_2}{x_1(1 - x_1)} \leqslant 4, \quad 0 < \frac{x_1}{x_2(1 - x_2)} \leqslant 4,$$

$$\left|\frac{1 - 2x_1}{1 - x_1}\,\frac{1 - 2x_2}{1 - x_2}\right| < 1.$$

Решение первого и второго неравенств соответствует множеству всех допустимых значений цикла периода 2. Третье неравенство выделяет из этого множества область существования *устойчивых* циклов. Зафиксируем значение $x_1 \in (0,1)$. Тогда, решая эту систему относительно x_2, получим

$$0 < x_2 < \frac{3x_1 - 2}{5x_1 - 3}, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{3},$$

$$0 < x_2 < \frac{x_1}{3x_1 - 1}, \quad \frac{1}{3} < x_1 < \frac{3}{5},$$

$$\frac{3x_1 - 2}{5x_1 - 3} < x_2 < \frac{x_1}{3x_1 - 1}, \quad \frac{3}{5} < x_1 < 1.$$

Таким образом, мы определили область существования всех устойчивых циклов периода 2,

$p = (x_1, x_2)$, для возмущенного отображения (37). Нетрудно построить соответствующую область в пространстве параметров (a_1, a_2). Для этого достаточно использовать соотношение (39).

II. Случай $k = 2$. Тогда период устойчивого цикла будет равен 4, т. е. $p = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Определим такие значения параметров возмущения a_1 и a_2, при которых этот цикл существует и устойчив.

Из соотношения (38) следует, что

$$x_2 = a_1 x_1 (1 - x_1),$$

$$x_3 = a_2 x_2 (1 - x_2),$$

$$x_4 = a_1 x_3 (1 - x_3),$$

$$x_1 = a_2 x_4 (1 - x_4).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2}{x_1(1-x_1)} = \frac{x_4}{x_3(1-x_3)}, \\ a_2 &= \frac{x_3}{x_2(1-x_2)} = \frac{x_1}{x_4(1-x_4)}. \end{aligned} \tag{41}$$

Легко видеть, что не всякому набору значений (x_1, x_2, x_3, x_4) будет соответствовать цикл возмущенного отображения. Выбрав в (41) два соотношения в качестве независимых, нетрудно аналитически выразить оставшиеся два. Таким же образом находятся параметры a_1 и a_2. Пусть независимыми значениями будут x_1 и x_2. Тогда, вводя обозначения $p_1 = x_1(1 - x_1)$, $p_3 = x_3(1 - x_3)$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_4} = \dfrac{p_1}{p_3}, \\ 1 - x_2 = (1 - x_4)\dfrac{x_3 p_3}{x_1 p_1}. \end{cases}$$

Отсюда легко выразить x_4 и x_2 через x_1 и x_3:

$$x_4 = \frac{x_1 p_1 p_3 - x_3 p_3^2}{x_1 p_1^2 - x_3 p_3^2}, \quad x_2 = \frac{x_1 p_1^2 - x_3 p_3 p_1}{x_1 p_1^2 - x_3 p_3^2}.$$

Эти соотношения позволяют также найти a_1 и a_2 через x_1 и x_3:

$$a_1 = \frac{x_1 p_1 - x_3 p_3}{x_1 p_1^2 - x_3 p_3^2}, \quad a_2 = \frac{x_1}{a_1 p_3 (1 - a_1 p_3)}. \tag{42}$$

Соотношение (42) можно использовать для построения области существования устойчивого цикла периода 4 в пространстве параметров (a_1, a_2). Именно: выбрав произвольно x_1, x_3, найдем a_1, a_2 и вычислим x_2, x_4. Теперь выберем лишь те значения x_1 и x_3, для которых верно следующее:

$$\begin{gathered} 0 < a_1 \leqslant 4, \quad 0 < a_2 \leqslant 4, \\ \beta(p) = \left| \frac{1 - 2x_1}{1 - x_1} \, \frac{1 - 2x_2}{1 - x_2} \, \frac{1 - 2x_3}{1 - x_3} \, \frac{1 - 2x_4}{1 - x_4} \right| < 1. \end{gathered} \tag{43}$$

Условия (43) с учетом (42) выделяют в пространстве (a_1, a_2) область существования устойчивых циклов периода 4 возмущенного ($\tau = 2$) квадратичного отображения.

III. Случай $k = 3$. При этом значении период устойчивого цикла возмущенного отображения (37) равен 6, $p = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Поскольку возмущение по-прежнему задается двумя параметрами (a_1, a_2), то точки цикла p должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2}{x_1(1-x_1)} = \frac{x_4}{x_3(1-x_3)} = \frac{x_6}{x_5(1-x_5)}, \\ a_2 &= \frac{x_3}{x_2(1-x_2)} = \frac{x_5}{x_4(1-x_4)} = \frac{x_1}{x_6(1-x_6)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Легко понять, что количество соотношений, связывающих значения координат цикла $p = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, равно четырем. Поэтому, выбрав два в качестве независимых, можно получить остальные и выразить через них параметры a_1 и a_2. В отличие от случая, когда $k = 2$, эту процедуру проделать до конца аналитически невозможно.

Остановимся на том, что можно найти из соотношений (44). Во-первых, как и в случае $k = 2$, выберем в качестве независимых координат x_1 и x_3. Тогда, проделывая те же преобразования, что и в предыдущем варианте, получим

$$a_1 = \frac{x_3 p_3 - x_5 p_1}{x_3 p_3^2 - x_5 p_1^2} = \frac{x_1 p_1 - x_3 p_5}{x_1 p_1^2 - x_3 p_5^2}, \tag{45}$$

где, как и ранее, $p_i = x_i(1 - x_i)$. Уравнения (45) — не что иное, как соотношения, связывающие между собой значения x_1, x_3, x_5, т. е.

$$A x_5^5 - B x_5^4 + C x_5^3 - D x_5^2 + E x_5 - F = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= p_1, & D &= x_3 p_3^2 + x_3 p_3 + p_1^2, \\ B &= 2p_1 + x_3 p_3, & E &= x_3 p_3^2, \\ C &= p_1 + p_1^2 + 2 x_3 p_3, & F &= x_1 p_1 p_3 (p_3 - p_1). \end{aligned}$$

Теперь, определяя $x_5 = f(x_1, x_3)$ из этого уравнения, при помощи соотношений (44) и (45) легко найти все оставшиеся параметры a_1, a_2, x_2, x_4, x_6. Далее, если из всех полученных таким образом циклов выбрать лишь те, которые удовлетворяют условиям $x_i \in (0; 1)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, $a_1, a_2 \in [0; 4]$, и условию устойчивости $|\beta(p)| < 1$, то можно построить область существования устойчивого цикла периода 6 возмущенного отображения (37) в пространстве параметров (a_1, a_2).

Заключение

Поскольку хаос встречается в подавляющем большинстве нелинейных динамических систем, в ряде случаев его развитие может быть нежелательным. В связи с этим в последнее время интенсивно разрабатывается новое направление в теории детерминированного хаоса, связанное с возможностью подавления хаотического поведения. Если достаточно слабо (аддитивно или мультипликативно) возмущать хаотическую систему (иными словами, производить обмен энергией между системой и окружающей средой), то хаос иногда вырождается в регулярное движение. Развитие этого направления привело к появлению новых замечательных приложений (см. введение) и позволило рассмотреть многие проблемы нелинейной динамики под новым углом зрения. Так, подход к решению одной из старых проблем — описанию самоорганизации, т. е. образованию и развитию сложных упорядоченных структур, — в рамках теории детерминированного хаоса получил новое развитие. Известно, что живые системы способны к самоорганизации. Это не противоречит законам термодинамики, поскольку все биологические системы не являются замкнутыми и обмениваются энергией с окружающей средой. Энтропия, служащая мерой беспорядка, в открытых системах может уменьшаться с течением времени. Необходимая предпосылка эффектов самоорганизации заключается в наличии потока энергии, поступающего в систему от внешнего источника и диссипируемого ею. Благодаря этому потоку система приобретает способность к автономному образованию структур. Очевидно, что эффекты самоорганизации не могут быть исключительным свойством биологических объектов и должны наблюдаться и в более простых системах.

Большой интерес представляют распределенные среды, которые построены из дискретных элементов, локально взаимодействующих друг с другом и, таким образом, приближенно описывающих естественные пространственно протяженные системы. Через каждый из этих элементов может проходить поток энергии, поступающий от внешнего источника. Хотя разнообразие таких сред чрезвычайно велико, число математических моделей, которые используются для описания процессов образования и развития структур, не столь значительно. По-видимому, даже когда отдельные элементы системы обладают сложной структурой, вся их внутренняя сложность не проявляется во взаимодействиях между ними и с точки зрения макросистемы они функционируют как достаточно простые объекты с малым числом эффективных степеней свободы.

Другим важным приложением теории детерминированного хаоса является изучение различного рода аритмий, возникающих в тканях сердца, и способов избавления от них. Известно, что сердечная мышца чувствительна к внешним возбуждениям. Если нормальный процесс сокращений нарушается как результат дополнительного поступления энергии, например, вследствие возникновения нового источника возбуждения, то даже в такой простейшей ситуации может наблюдаться очень сложное поведение. Основная проблема здесь — как избавиться от аритмии при помощи определенных слабых возмущений, не приводящих к сильным вмешательствам в среду.

К этому направлению тесно примыкает не менее интересная область исследований нелинейной динамики, изучающая колебательные химические реакции. Хотя в настоящее время многое здесь уже понято, причины, вызывающие колебательные химические процессы, не выяснены до конца. Динамическое описание колебательных химических реакций может оказать существенную помощь, в частности, в установлении косвенным путем недостающих констант скоростей реакций. Кроме того, возможность стабилизации хаотических химических процессов в распределенных средах позволит подойти к исследованию явления резонансов спиральных волн с точки зрения теории динамических систем.

Знание основных закономерностей поведения хаотических систем дает возможность перейти к целенаправленному конструированию искусственных систем, нелинейные процессы в которых приводили бы к образованию нужных структур. Пока в этом направлении предпринимаются лишь самые первые шаги. Наиболее развитым приложением является создание устройств обработки информации на основе применения хаотических систем. Действие таких устройств базируется на использовании естественной «внутренней» структуры системы и управлении притоком энергии. Это позволяет при относительно малых энергетических затратах создать устройства принципиально нового типа, способные запоминать, шифровать и обрабатывать заданную информацию.

Естественно, практическое использование задач управления хаотическими системами не исчерпывается только перечисленными приложениями. Однако бо́льшую их часть можно найти в приведенном ниже списке литературы.

В заключение необходимо отметить, что в настоящее время проблема управления динамическими системами и подавления хаоса продолжает достаточно интенсивно развиваться. Кроме того, публикуются новые работы, посвященные разработкам новых прикладных задач. Поэтому в ближайшем будущем можно ожидать появления большого числа уже реализованных неожиданных и интересных приложений.

Автор выражает глубокую благодарность научным сотрудникам С.Д. Рыбалко, А.Н. Дерюгину и А.К. Прохорову, а также аспирантам и студентам кафедры физики полимеров и кристаллов физического факультета МГУ за многочисленные плодотворные обсуждения данной работы.

Литература

1. *Лоскутов А.Ю.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 2. P. 1).
2. *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука, 1970.
3. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
4. *Синай Я.Г.* // ДАН СССР. 1963. **153**. С. 1261.
5. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаот. динамика, 1999.
6. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
7. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
8. *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1959. **124**. С. 754.
9. *Синай Я.Г.* // ДАН СССР. 1959. **124**. С. 768.
10. *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
11. *Смейл С.* // Успехи матем. наук. 1970. **25**, №1. С. 113.
12. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
13. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967.
14. *Lasota A., Mackey M.C.* Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
15. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999 (*Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995).
16. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 1–9. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985–1991.
17. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Наука, 1995.
18. SPIE Proc. 1993. **2038**.
19. *Loskutov A.Yu., Tereshko V.M.* // Artificial Neural Networks / Eds. I. Alexander, J. Taylor. Elsevier, North-Holland, 1992. P. 449.
20. *Loskutov A.Yu., Tereshko V.M.* // SPIE Proc. 1993. **2038**. P. 263.
21. *Hayes S., Grebogi C., Ott E.* // Phys. Rev. Lett. 1993. **70**. P. 3031.
22. *Hayes S., Grebogi C., Ott E., Mark A.* // Phys. Rev. Lett. 1994. **73**. P. 1781.
23. *Abarbanel H.D.I., Linsay P.S.* // IEEE Trans. Circuits Systs. 1993. **40**, No. 10. P. 643.
24. *Лоскутов А.Ю., Мищенко Ю.В., Рыбалко С.Д.* // Физ. мысль России. 1997. №2/3. С. 53.
25. *Loskutov A.Yu., Thomas G.E.* // SPIE Proc. 1993. **2037**. P. 238.
26. *Bresler L., Metcalfe G., Ottino J.M., Shinbrot T.* // Chem. Eng. Sci. 1996. **58**. P. 1671.
27. *Shinbrot T., Ottino J.M.* // Phys. Rev. Lett. 1993. **71**. P. 843.
28. *Лоскутов А.Ю., Томас Г.Э.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. №5. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1993. No. 5. P. 1).
29. *Glass L.* // Chaos. 1991. **1**. P. 13.
30. *Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L.* // Science. 1992. **257**. P. 1230.
31. *Лоскутов А.Ю., Рыбалко С.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. №4. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 1993. No. 4. P. 15).
32. *Лоскутов А.Ю.* // Прикл. нелин. динамика. 1994. **2**, №3–4. С. 14.
33. *Loskutov A.Yu., Tereshko V.M., Vasiliev K.A.* // Int. J. Neural Systems. 1995. **6**. P. 175.
34. *Solé R.V., Menéndez L. de la Prida* // Phys. Lett. 1995. **A199**. P. 65.
35. *Schiff S.J., Jerger K., Duong D.H.* et al. // Nature. 1994. **370**. P. 615.
36. *Chen G., Dong X.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1993. **3**. P. 1363.
37. *Shinbrot T.* // Adv. Phys. 1995. **44**, No. 2. P. 73.
38. *Lima R., Pettini M.* // Phys. Rev. A. 1990. **41**. P. 726.
39. *Singer J., Wang Y.-Z., Bau H.H.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 1123.
40. *Fronzoni L., Geocondo M., Pettini M.* // Phys. Rev. A. 1991. **43**. P. 6483.
41. *Braiman Y., Goldhirsh I.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 2545.
42. *Rajasekar S., Lakshmanan M.* // Physica D. 1993. **67**. P. 282.
43. *Bielawski S., Derozier D., Glorieux P.* // Phys. Rev. E. 1994. **49**. P. 971.
44. *Bayly Ph.V., Virgin L.N.* // Phys. Rev. E. 1994. **50**. P. 604.
45. *Vassiliadis D.* // Physica D. 1994. **71**. P. 319.
46. *Hübinger B., Doerner R., Martienssen W.* // Phys. Rev. E. 1994. **50**. P. 932.
47. *Mettini R., Kurz T.* // Phys. Lett. 1995. **A206**. P. 331.
48. *Chacon R.* // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 761.
49. *Shinbrot T.* // Nonlinear Sci. Today. 1993. **3**, No. 2. P. 1.
50. *Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Nature. 1993. **363**. P. 411.
51. *Pettini M.* // Dynamics and Stochastic Processes / Ed. R. Lima, L. Streit, R. Vilela Mendes. Berlin: Springer-Verlag, 1990. P. 242.
52. *Kivshar Yu.S., Rödelsperger B., Benner H.* // Phys. Rev. E. 1994. **49**. P. 319.
53. *Corbet A.B.* // Phys. Lett. 1988. **A130**. P. 267.
54. *Jackson E.A., Hübler A.* // Physica D. 1990. **44**. P. 407.
55. *Jackson E.A.* // Phys. Rev. A. 1991. **44**. P. 4839.
56. *Huberman B.A., Lumer E.* // IEEE Trans. Circuits Syst. 1990. **37**. P. 547.
57. *Pyragas K.* // Z. Naturforsch. 1993. **A48**. P. 629.
58. *Chacon R.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **77**. P. 482.
59. *Mettin R.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. **8**. P. 1707.
60. *Hübler A., Georgii R., Kuckler M.* et al. // Helv. Phys. Acta. 1988. **61**. P. 897.
61. *Hübinger B., Doerner R., Martienssen W.* // Z. f. Phys. B. 1993. **90**. P. 103.
62. *Linder J.F., Ditto W.L.* // Appl. Mech. Rev. 1995. **48**, No. 12. P. 795.
63. *Ott E., Spano M.L.* // Physics Today. 1995. **48**, No. 5. P. 34.
64. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1990. **64**. P. 1196.
65. *Romeiras F.J., Ott E., Grebogi C., Dayawansa W.P.* // Physica D. 1992. **58**. P. 165.

66. *Лоскутов А.Ю., Шишмарев А.И.* // Успехи матем. наук. 1993. **48**, №1. С. 169.
67. *Loskutov A.Yu., Shishmarev A.I.* // Chaos. 1994. **4**. P. 351.
68. *Loskutov A.Yu.* // Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results. / Ed. J. Awreicewicz. Berlin: Springer-Verlag, 1995. P. 125.
69. *Deryugin A.N., Loskutov A.Yu., Tereshko V.M.* // Chaos, Solitons and Fractals. 1996. **7**, No. 10. P. 1555.
70. *Loskutov A.Yu., Tereshko V.M., Vasiliev K.A.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. **6**. P. 725.
71. *Лоскутов А.Ю., Прохоров А.К.* // Физ. мысль России. 1997. №2/3. С. 36.
72. *Дерюгин А.Н., Лоскутов А.Ю., Терешко В.М.* // ТМФ. 1995. **104**, №3. С. 507.
73. *Galias Z.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1995. **5**. P. 281.
74. *Shinbrot T., Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1990. **65**. P. 3215.
75. *Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Lett. 1992. **A169**. P. 349.
76. *Shinbrot T., Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* // Phys. Rev. A. 1992. **45**. P. 4165.
77. *Kostelich E., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. E. 1993. **47**. P. 305.
78. *Meucci R., Gadomski W., Ciofini M., Arecchi F.T.* // Phys. Rev. E. 1994. **49**. P. 2528.
79. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
80. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.
81. *Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1983. №4. С. 84 (Moscow University Phys. Bull. 1983. No. 4. P. 106).
82. *Кузнецов Ю.И., Милюлин В.В., Минакова И.И., Сильнов Б.А.* // ДАН СССР. 1984. **275**. С. 1388.
83. *Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М.* // ДАН СССР. 1985. **281**. С. 291.
84. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
85. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. №3. С. 40 (Moscow University Phys. Bull. 1985. No. 3. P. 46).
86. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Т. VIII. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. С. 175.
87. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* // ДАН СССР. 1987. **293**. С. 1346.
88. *So P., Ott E.* // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 2955.
89. *Johnson G.A., Löcher M., Hunt E.R.* // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 1625.
90. *Auerbach D.* // Phys. Rev. Lett. 1994. **72**. P. 1184.
91. *Ding M., Ott E., Grebogi C.* // Physica D. 1994. **74**. P. 386.
92. *Socolar J.E.S., Sukow D.W., Gauthier D.J.* // Phys. Rev. E. 1994. **50**. P. 3245.
93. *Kittel A., Pyragas K., Richter R.* // Phys. Rev. E. 1994. **50**. P. 262.
94. *Matias M.A., Guemez J.* // Phys. Rev. Lett. 1994. **72**. P. 1455.
95. *Loskutov A.Yu.* // J. Phys. A. 1993. **26**. P. 4581.
96. *Loskutov A.Yu., Rybalko S.D.* Parametric perturbations and suppression of chaos in n-dimensional maps: Prepr. ICTP IC/94/347, Trieste, Italy, November 1994.
97. *Hübler A.* // Helv. Phys. Acta. 1989. **62**. P. 343.
98. *Lüsher E., Hübler A.* // Helv. Phys. Acta. 1989. **62**. P. 544.
99. *Reiser G., Hübler A., Lüscher E.* // Z. Naturforsch. 1987. **A42**. P. 803.
100. *Farmer J.D., Sidorovich J.J.* Optimal shadowing and noise reduction: Prepr. of the Los Alamos National Lab. No LA-UR-90-653.
101. *Starobinets I.M., Pikovsky A.S.* // Phys. Lett. 1993. **A181**. P. 149.
102. *Liu Y., Kikuchi N., Ohtsubo J.* // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 2697.
103. *Petrov V., Crowley M.J., Showalter K.* // Phys. Rev. Lett. 1994. **72**. P. 2955.
104. *In V., Ditto W.L., Spano M.L.* // Phys. Rev. E. 1995. **51**. P. 2689.
105. *Blazejczyk B., Kapitaniak T., Woewoda J., Brindley J.* // Appl. Mech. Rev. 1993. **46**, No. 7. P. 385.
106. *Komarova N.L., Loskutov A.Yu.* // SPIE Proc. 1993. **2037**. P. 71.
107. *Комарова Н.Л., Лоскутов А.Ю.* // Матем. моделирование. 1995. **7**, №10. С. 133.
108. *Loskutov A.Yu., Rybalko S.D., Feudel U., Kurths J.* // J. Phys. A. 1996. **29**. P. 5759.
109. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
110. *El Naschie M.S.* Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach. L.: McGraw-Hill, 1990.
111. *Jackson E.A.* Perspectives of Nonlinear Dynamics. Vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 1990.
112. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1990 (Third printing).
113. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
114. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
115. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2nd ed. N.Y.; Amsterdam: Addison-Wesley Publ. Co., 1993.
116. *de Melo W., van Strien S.* One-Dimensional Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
117. *Мельников В.К.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3.
118. *Wiggins S.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
119. *Duffing G.* Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1918.
120. *Капица П.Л.* // ЖЭТФ. 1951. **21**, №5. С. 588.
121. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.
122. *Белых В.П.* // Системы фазовой синхронизации / Ред. В.В. Шахгильдян, Л.Н. Белюстина. М.: Радио и связь, 1982. С. 161.
123. *Бунимович Л.А.* // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 173.

Поступила в редакцию
09.02.01