ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 538.4

ПЕРЕНОС ПАССИВНОГО СКАЛЯРА СЛУЧАЙНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ

С. В. Новиков, Д. Д. Соколов

(*кафедра математики*)

E-mail: novikov@afrodita.phys.msu.su

Сравнивается поведение пассивного скаляра в турбулентном потоке и в стационарном потоке жидкости со стохастическими траекториями. Показано, что перемешивание распределения примеси со скоростью, определяемой турбулентной диффузией, сменяется в стационарном потоке фазой катастрофически быстрого выравнивания градиентов примеси.

Введение

Турбулентный поток хорошо проводящей жидкости может усиливать первоначально слабое магнитное поле со скоростью, определяемой временем оборота турбулентного вихря (быстрое динамо) [1]. Поведение магнитного поля в стационарном случайном потоке в определенной степени воспроизводит такой рост [2–4]. Однако в задаче быстрого динамо в основном приходится опираться на опыт трехмерного численного моделирования в пределе больших времен и больших чисел Рейнольдса, так что даже после почти двадцатилетних усилий (см. обзор в работе [5]) ситуация остается не вполне ясной. В работе [6] был предложен путь, во многом позволяющий обойти отмеченные трудности. Суть идеи состоит в том, чтобы рассматривать стохастическое течение в специально подобранном римановом пространстве, предложенном Арнольдом [7], в котором задача переноса решается точно.

Конечно, изучение переноса в искривленном римановом пространстве с нетривиальной топологией в качестве базовой модели для переноса магнитного поля в евклидовом пространстве достаточно непривычно. Однако Арнольд [2] неоднократно подчеркивает внутреннее родство задачи переноса стохастическим полем скорости с задачей о разбегании геодезических в пространствах отрицательной кривизны. Кроме того, сама постановка задачи о потоке со стохастическими траекториями содержит элементы идеализации. Например, поток остается не зависящим от времени, тогда как он гидродинамически неустойчив, и остается неясным, что препятствует превращению его в настоящую турбулентность.

Построенный в работе [6] случайный поток на малых временах экспоненциально усиливает первоначально слабое магнитное поле. С течением времени решение стремится к собственной функции. При этом собственные функции делятся на два класса. Одни из них представляют собой функции, которые сохраняют экспоненциальный рост, но зависят лишь от одной координаты и совершенно непохожи на возможные собственные функции задачи динамо в евклидовом пространстве. Другой тип функций имеет стандартную пространственную структуру, однако эти функции катастрофически быстро затухают. Момент смены поведения определяется магнитным числом Рейнольдса. Стационарное поле скорости со стохастическими линиями тока хорошо воспроизводит свойства турбулентности только на ограниченном интервале времени.

Вопрос об усилении магнитного поля в стационарном потоке близок к задаче о переносе скалярного поля (например, температуры или примеси). В начале 1980-х гг. эта задача казалась недостаточно интересной и перенос примеси в стохастическом потоке [6] остался неизученным. В настоящее время ситуация изменилась, для переноса скаляра в турбулентном потоке удалось найти много нетривиальных свойств (см., напр., [8] и приведенные там ссылки). Поэтому имеет смысл вернуться к этой проблематике и сопоставить поведение примеси в турбулентности и в стационарном случайном потоке в римановом пространстве.

1. Стационарное течение с экспоненциальным растяжением частиц

Рассмотрим трехмерное компактное многообразие, которое строится в декартовых координатах как произведение двумерного тора $(x,y) \bmod 1$ на отрезок $0 \leqslant z \leqslant 1$, торцевые торы которого отождествлены по закону $(x,y,0) \equiv (2x+y, x+y, 1)$. В этом многообразии можно ввести риманову метрику, инвариантную относительно преобразований $(x,y,z) \to (x+1,y,z)$; $(x,y,z) \to (x,y+1,z)$; $(x,y,z) \to (2x+y, x+y, z+1)$. Матрица, отвечающая за последнее преобразование, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, имеет единичный детерминант, а следовательно, это преобразование сохраняет площадь. Собственные числа этой матрицы равны $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Если перейти от координат x, y, z к координатам p, q, z, где ось p направлена по собственному вектору с собственным числом $\lambda_2 < 1$, а q — по собственному вектору с $\lambda_1 > 1$, то метрика

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-2\mu z}\, dp^2 + \mathrm{e}^{2\mu z}\, dq^2 + dz^2, \qquad \mu = \ln \lambda_1 \approx 0.96 \tag{1}$$

инвариантна относительно преобразований отождествления и поэтому определяет риманову метрику на трехмерном компактном многообразии.

На этом многообразии рассмотрим поток $\mathbf{V} = (0, 0, v)$, где $v = \mathrm{const}$, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. При движении в таком поле скорости каждая частица экспоненциально сжимается вдоль направления p и растягивается вдоль направления q. Выражения для дифференциальных операций в метрике (1) приведены в работе [6].

Поведение скалярного поля Φ при заданном стационарном течении несжимаемой жидкости $\mathbf{V}$ описывается уравнением переноса, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{grad} \Phi = \mathrm{Pe}^{-1} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi), \tag{2}$$

где Pe — число Пекле, которое в данной задаче предполагается большим. Учитывая симметрию задачи, разложим поле Φ в ряд Фурье по переменным x, y:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(z, t)\, \mathrm{e}^{2\pi i (nx + my)} = \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\beta}(z, t)\, \mathrm{e}^{i(\alpha p + \beta q)},$$

где n, m — целые числа, а α и β выбираются так, чтобы новые оси p и q были направлены вдоль собственных векторов матрицы A (при этом важно, что A — самосопряженная матрица).

2. Решение задачи переноса

Следуя [6], рассмотрим сначала решение уравнения (2) для случая малых времен, когда вторыми производными можно пренебречь. Тогда уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial t} + v \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial z} + \varepsilon(\alpha^2\, \mathrm{e}^{2\mu z} + \beta^2\, \mathrm{e}^{-2\mu z}) \psi_{\alpha\beta} = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \mathrm{Pe}^{-1}$. Уравнение (3) решается точно:

$$\psi_{\alpha\beta}(z, t) = \psi_{\alpha\beta}(z - vt, 0) \times \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2\mu v} \left\{ \alpha^2\, \mathrm{e}^{2\mu z}(1 - \mathrm{e}^{-2\mu v t}) - \beta^2\, \mathrm{e}^{-2\mu z}(1 - \mathrm{e}^{2\mu v t}) \right\} \right]. \tag{4}$$

Видно, что сначала поле Φ переносится вместе с жидкостью и практически не затухает, а эффектами молекулярной диффузии можно пренебречь, однако решения (4) при временах $t \gtrsim \frac{z}{v} + \frac{1}{2\mu v} \ln \frac{2\mu v}{\varepsilon \beta^2}$ начинают убывать сверхэкспоненциально быстро:

$$\psi_{\alpha\beta}(z, t) \approx \psi_{\alpha\beta}(z - vt, 0) \exp\left[-\frac{\varepsilon \beta^2}{2\mu v}\, \mathrm{e}^{-2\mu z + 2\mu v t} \right].$$

Такое поведение приближенного решения (4) на больших временах является следствием быстрого уменьшения масштаба распределения примеси. Это уменьшение масштаба имеет в точности ту же природу, что и уменьшение масштаба магнитного поля. Природа уменьшения и связь его с граничными условиями для переносимого поля подробно обсуждаются в работе [6].

Отбрасывая в уравнении (2) правую часть, мы фактически пренебрегали влиянием диффузионного члена, который при сильно уменьшенном масштабе начинает играть существенную роль. Учтем теперь влияние вторых производных в уравнении (2), которое приобретает вид

$$\frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial t} + v \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial z} + \varepsilon(\alpha^2\, \mathrm{e}^{2\mu z} + \beta^2\, \mathrm{e}^{-2\mu z}) \psi_{\alpha\beta} = \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_{\alpha\beta}}{\partial z^2}. \tag{5}$$

В этом случае возникают два качественно отличных решения для $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Анализ уравнения (5) начнем с более простого случая $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Тогда решение уравнения (5) можно искать в виде $\psi_{00} \sim \exp(\lambda t + 2\pi l i z)$, l — целое число, отсюда получаем скорость затухания $\lambda = -4\pi^2 l^2 \varepsilon - 2\pi v l i$ и собственные функции

$$\psi_{00}(z, t) \sim \mathrm{e}^{-4\pi^2 l^2 \varepsilon t} \cdot \mathrm{e}^{2\pi l i (z - vt)}.$$

При этом можно сделать предельный переход к течению без диссипации ($\varepsilon \to 0$), когда решение переносится без расплывания.

В случае $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ сделаем замену $\psi_{\alpha\beta}(z, t) = \chi(z) \exp[\frac{v}{2\varepsilon} z + \gamma t]$ и сведем уравнение (5) к уравнению типа Шрёдингера с потенциалом $U(z) = 2\varepsilon |\alpha\beta| \operatorname{ch}(2\mu \tilde{z})$, $\tilde{z} = z + \frac{1}{2\mu} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$, энергией $\Gamma = -\gamma - \frac{v^2}{4\varepsilon^2}$ и ε вместо постоянной Планка.

Для коэффициента затухания γ получаем оценку

$$\gamma = -\frac{v^2}{4\varepsilon} - 2|\alpha\beta| + o(\varepsilon), \tag{6}$$

т. е. решение затухает тем быстрее, чем меньше ε. Полученный результат не похож на результаты для турбулентной диффузии, для которой затухание решения практически не зависит от коэффициента молекулярной диффузии. Поведение решения качественно отличается от случая с $\alpha = 0$, $\beta = 0$, так как нельзя сделать предельный переход при $\varepsilon \to 0$ к решению для потока без диссипации. Парадоксально, что при увеличении числа Пекле решение начинает затухать быстрее.

Покажем, что случай обращения в нуль только α или только β невозможен. Рассмотрим для примера случай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Эта гармоника соответствует на плоскости (n, m) вектору, параллельному собственному вектору матриц A. Поэтому такой вектор не меняет своего направления в ходе эволюции. С другой стороны, координаты m и n должны быть целыми, т. е. тангенс угла между собственным вектором и осью m должен быть рациональным числом. Однако в силу иррациональности собственных значений этот тангенс также иррационален, так что и $\beta = 0$.

Итак, при больших числах Пекле катастрофически быстро затухают гармоники, зависящие от координат x и y, и в решении остается только нулевая гармоника, которая, медленно затухая, переносится потоком.

3. Обсуждение

Сопоставим поведение полученного решения со свойствами эволюции поля примеси в турбулентном потоке. В турбулентном потоке перенос поля примеси, осредненного по ансамблю реализаций поля скорости, управляется тем же уравнением (2), однако в него вместо скорости входит средняя скорость течения, а число Пекле вычисляется с помощью коэффициента не молекулярной, а турбулентной диффузии β. В простейших случаях $\beta = v^2\tau/3 = vl/3$, где v — характерное значение турбулентной скорости, l — корреляционный масштаб турбулентности, а τ — время памяти. Мы не можем ожидать, что поведение примеси в стационарном случайном поле скорости буквально воспроизведет этот результат, хотя бы потому, что в нашем случае отсутствует ансамбль реализаций поля скорости, а поведение среднего поля примеси в течении с длинными временными корреляциями может управляться более сложными уравнениями, чем (2) (см., напр., [8]). Однако поведение примеси на начальном этапе эволюции в целом соответствует представлению о роли турбулентной диффузии. Траектория жидкой частицы за время $1/v$ перескакивает в плоскости (x, y) на расстояние порядка μ^{-1}, причем уже последовательность из нескольких скачков можно рассматривать как случайное блуждание, так что коэффициент турбулентной диффузии определяется величиной $v\mu^{-1}$.

Важно подчеркнуть, что поведение поля примеси на втором этапе эволюции не укладывается в представление о действии турбулентной диффузии. Действительно, из (6) следует, что при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$$\psi_{\alpha\beta}(z, t) \sim \exp\left[-\frac{v^2}{4\varepsilon}t + \frac{v}{2\varepsilon}z\right],$$

так что при $t > t^* = 4\varepsilon/v^2 + z/2v$ распределение примеси практически перестает зависеть от x и y, а его перенос вдоль оси z и медленное расплывание не аналогичны перемешиванию примеси турбулентным потоком.

Рассмотренная смена режима эволюции пассивной примеси в стационарном случайном потоке аналогична смене поведения магнитного поля, обсуждаемого в работе [6]. При изучении затухания корреляций между первоначально близкими траекториями в бильярдах [9] также обращается внимание на то, что корреляции спадают экспоненциально на ограниченном отрезке времени, а потом спадание переходит в степенное.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-02-16158).

Литература

1. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* Magnetic Fields in Astrophysics. N.Y.: Gordon and Breach, 1983.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
3. *Арнольд В.И., Коркина Е.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Мех. 1983. №3. С. 43.
4. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // УФН. 1984. **145**, №4. С. 593.
5. *Childress S., Gilbert A.D.* Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
6. *Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // ЖЭТФ. 1981. **81**, №6. С. 2052.
7. *Арнольд В.И.* // Прикл. матем. и мех. 1972. **36**, №2. С. 255.
8. *Elperin T., Kleeorin N., Rogachevskii I., Sokoloff D.* // Phys. Rev. E. 2000. **61**. P. 2617.
9. *Бунимович Л.А.* // ЖЭТФ. 1985. **89**, №4. С. 1452.

Поступила в редакцию
16.10.00