УДК 539.12.01

ПОРОГОВЫЕ РЕАКЦИИ В ПОСТОЯННОМ СКРЕЩЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С НЕНУЛЕВЫМ ИНВАРИАНТОМ $E^2 - H^2$

В. Н. Родионов, А. М. Мандель

(*кафедра общей физики и молекулярной электроники*)

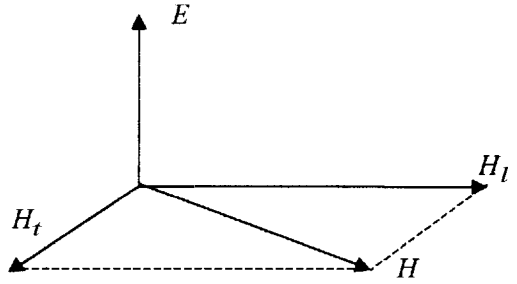
E-mail: physics@msgpa.msgpa.ru

Рассмотрено влияние внешнего статического электромагнитного поля, являющегося суперпозицией скрещенного ($E = H$) и магнитного полей, на некоторые процессы квантовой электродинамики, нелинейные явления в атомной физике и на ряд процессов в физике полупроводников. Проиллюстрировано принципиальное различие влияния скрещенного и магнитного полей на вероятности рассмотренных реакций. Описан простой алгоритм перехода от результатов, справедливых в нерелятивистском пределе в постоянном скрещенном поле, к случаю поля с $E^2 - H^2 \neq 0$.

Интерес к изучению воздействия внешних электромагнитных полей на различные квантовоэлектродинамические процессы определяется в основном двумя аспектами. Первый имеет фундаментальное значение и относится к проблеме влияния внешних полей на структуру физического вакуума (см., напр., [1, 2]). Второй носит прикладной характер и связан с изучением воздействия интенсивных полей на реакции с заряженными частицами, как, например, в случае процессов нелинейной ионизации атомов и их ионов при взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом [3]. Сюда же можно отнести и многочисленные исследования возможностей «управления» ходом реакций бета-распада с помощью интенсивных электромагнитных полей лазерного типа (см. [4, 5] и цитированные там работы).

Планомерное изучение целого ряда фундаментальных процессов позволило установить, что выражения для их вероятностей и сечений в нерелятивистском пределе имеют однотипный вид даже в электромагнитных полях сложной конфигурации [4, 5]. Важно, что подобными выражениями описываются и некоторые процессы в физике полупроводников [5, 6].

В настоящей работе нами рассмотрены нерелятивистские пределы вероятностей (сечений) ряда процессов во внешнем электромагнитном поле, являющемся длинноволновым или статическим пределом поля конфигурации Редмонда [4]. Как известно, поле конфигурации Редмонда представляет собой комбинацию поля бегущей электромагнитной волны и однородного постоянного магнитного (или электрического) поля, направление которого совпадает с направлением распространения волны. В длинноволновом пределе частота бегущей волны устремляется к нулю. Получившаяся при этом конфигурация является скрещенным полем с инвариантом $E^2 - H^2 < 0$. Она представляет собой комбинацию продольного магнитного поля с напряженностью H_l и поперечного скрещенного поля, являющегося, в свою очередь, комбинацией ортогональных друг другу (и продольному полю) электрического E и магнитного H_t полей с одинаковой напряженностью $E = H_t = F$ (рисунок). Ситуация $E^2 - H^2 \geqslant 0$ в нерелятивистском приближении, по существу, рассматривалась в работах [5, 6]. В этом случае действие магнитного поля H на легкие частицы подавлено по сравнению с действием электрического поля E из-за отношения v/c, определяющего силу Лоренца, где v — скорость заряженных частиц. Таким образом, действие поля при $E^2 - H^2 \geqslant 0$ сводится к действию чисто электрического поля, что подтверждается совпадением вероятностей ряда процессов, рассчитанных в постоянном скрещенном поле с $E = H_t$ и в чисто электрическом поле E [5].



Длинноволновый предел поля конфигурации Редмонда: E и H_t — электрическая и магнитная составляющие скрещенного поля ($E = H_t = \text{const}$); $H_l = \text{const}$ — продольное магнитное поле; $H = (H_l^2 + H_t^2)^{1/2}$ — магнитное поле, определяющее значение инварианта $E^2 - H^2 < 0$

Описываемая конфигурация внешнего электромагнитного поля примечательна тем, что ее составляющие имеют существенно различный характер. Как известно, в скрещенном поле с одинаковыми напряженностями электрической и магнитной составляющей оба полевых инварианта обращаются в нуль. Следствием этого является отсутствие поляризации вакуума и обращение в нуль лагранжиана

Гейзенберга–Эйлера в этом поле [1]. Продольное же поле изменяет уровни энергии вакуумных электронов. В случае достаточно сильного магнитного поля его называют квантующим [6], и продукт квантования энергии в таком поле — уровни Ландау. Следует ожидать, что влияние на рассматриваемые реакции суперпозиции этих полей при их достаточной интенсивности может приводить к нетривиальным результатам.

Нами рассмотрены процессы рождения электрон-позитронных пар двумя фотонами с совпадающими и противоположными круговыми поляризациями, а также разрешенный β-распад. При совпадающих поляризациях сталкивающихся фотонов их общий момент L в системе центра масс равен нулю, а при противоположных $L=2$. В теории фотопоглощения полупроводников во внешнем поле первая из упомянутых реакций соответствует прямым разрешенным межзонным переходам, а вторая — запрещенным.

Методика расчета изучаемых процессов для конфигурации Редмонда подробно изложена в работах одного из авторов [4, 7] и целом ряде цитируемых там более ранних источников. Правда, основные результаты в них получены в виде достаточно сложных интегральных представлений, подробно исследованных только в предельных случаях, когда в суперпозиции доминирует одна из составляющих поля. В настоящей работе мы не будем накладывать никакие ограничения на интенсивности полей, входящих в конфигурацию, кроме тех, что накладываются самим характером рассматриваемого нерелятивистского приближения. Именно это позволяет сопоставить характер влияния различных составляющих поля, скрытый в случае малости одной из них. Переходя в соответствующих выражениях для вероятностей процессов, полученных в работах [4, 7], к длинноволновому пределу $\omega \to 0$ для рождения пар фотонами совпадающих поляризаций (предполагается, что фотоны движутся вдоль продольной составляющей магнитного поля), можем записать

$$W^+/W_0^+ = \frac{1}{4}\pi^{-1/2}\exp\left(-i\pi\frac{3}{4}\right) I^{-1/2}\mu_0 \times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho\cdot\rho^{-1/2}\,\mathrm{ctg}\,(\mu_0\rho)\exp\left(iS_1\right). \tag{1}$$

В случае фотонов противоположных поляризаций имеем:

$$W^-/W_0^- = \frac{3}{8}\pi^{-1/2}\exp\left(i\pi\frac{3}{4}\right) I^{-3/2}\mu_0^2 \times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho\cdot\rho^{-1/2}\sin^{-2}(\mu_0\rho)\exp\left(iS_1\right). \tag{2}$$

Аналогично для процесса разрешенного ядерного β-распада записываем:

$$W^\beta/W_0^\beta = \frac{105}{64}\pi^{-1/2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) I^{-7/2}\mu_0 \times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho\cdot\rho^{-7/2}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\exp\left(iS_2\right), \tag{3}$$

где W^+, W^-, W^β — вероятности нерелятивистских реакций во внешнем поле, W_0^+, W_0^-, W_0^β — соответствующие вероятности в отсутствие внешнего поля, $I=\Delta\varepsilon/m$ — так называемое энерговыделение, т. е. нормированная на массу электрона энергия $\Delta\varepsilon$, выделяющаяся ($I>0$) или поглощающаяся ($I<0$) в реакции, m — масса электрона, μ_0 — отношение напряженностей продольного магнитного поля и характерного поля $H_c=m^2/e$ [2]:

$$\mu_0 = eH/m^2.$$

Показатели экспонент в формулах (1)–(3) имеют вид

$$S_1 = \rho\left(I+\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right) - \frac{\chi_0^2}{\mu_0^3}\,\mathrm{tg}\,(\mu_0\rho/2),$$

$$S_2 = \rho\left(I-\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right) + \frac{\rho^2\chi_0^2}{4\mu_0}\,\mathrm{ctg}\,(\mu_0\rho/2),$$

а χ_0 — отношение напряженности скрещенного поля к характерному:

$$\chi_0 = eF/m^2.$$

В интегралах (1)–(3) предполагается, что полюсы подынтегральной функции сдвинуты в верхнюю полуплоскость, так что переменная интегрирования ρ имеет бесконечно малую мнимую добавку (т. е. заменяется на $\rho - i\varepsilon$). Здесь и во всех последующих формулах принята система единиц $\hbar = c = 1$.

Предэкспоненциальные функции в (1)–(3) удобно представить в виде

$$\mathrm{ctg}\,(\mu_0\rho) = i + 2i\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-2i\mu_0\rho n\right),$$

$$\sin^{-2}(\mu_0\rho) = -4\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\exp\left(-2i\mu_0\rho n\right).$$

Сходимость этих рядов обеспечивается упомянутой мнимой добавкой к ρ.

Тогда для вероятностей фоторождения пар при совпадающих поляризациях фотонов получим

$$W^+/W_0^+ = \frac{1}{4}\pi^{-1/2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{\mu_0}{I^{1/2}} \times \tag{4}$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\cdot\rho^{-1/2}\exp\left[i\rho\left(I+\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right)-i\frac{\chi_0^2}{\mu_0^3}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\right]+\right.$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\cdot\rho^{-1/2}\exp\left[i\rho\left(I-2\mu_0 n+\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-i\frac{\chi_0^2}{\mu_0^3}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\right]\right\};$$

при их противоположных поляризациях имеем:

$$W^-/W_0^-=\frac{3}{2}\pi^{-1/2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{\mu_0^2}{I^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\times$$
$$\times\rho^{-1/2}\exp\left[i\rho\left(I-2\mu_0 n+\frac{\chi^2}{2\mu_0^2}\right)-i\frac{\chi^2}{\mu_0^3}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\right]. \tag{5}$$

Аналогично для β-распада можно записать

$$W^\beta/W_0^\beta=\frac{105}{64}\pi^{-1/2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\frac{\mu_0}{I^{7/2}}\times$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\cdot\rho^{-7/2}\exp\left[i\rho\left(I-\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right)+i\frac{\rho^2\chi_0^2}{4\mu_0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\right]+\right.$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\rho\cdot\rho^{-7/2}\exp\left[i\rho\left(I-\mu_0 n-\frac{\chi_0^2}{2\mu_0^2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+i\frac{\rho^2\chi_0^2}{4\mu_0}\operatorname{ctg}\left(\frac{\mu_0\rho}{2}\right)\right]\right\}. \tag{6}$$

Основной вклад в интегралы в (4)–(6) дает окрестность точки $\rho=0$, где обращаются в нуль две первые производные экспоненциальной функции. Дополнительный вклад дают окрестности бесконечного множества стационарных точек, в которых обращаются в нуль, вообще говоря, только первые производные. В результате можно получить довольно громоздкие однократные ряды, главные члены которых, обусловленные вкладом нулевой точки, имеют вид

$$W^+/W_0^+=\frac{2}{\pi}\mu z^{1/2}\left[\Phi^2(-z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi^2(-z_n)\right], \tag{7}$$

$$W^-/W_0^-=\frac{24}{\pi}\mu^2 z^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\Phi^2(-z_n), \tag{8}$$

$$W^\beta/W_0^\beta=\frac{7}{2\pi}\mu z^{-5/2}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{3}{8}+z^3\right)\Phi^2(-z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{8}+y_n^3\right]\Phi^2(-y_n)-\right.$$
$$-\frac{z}{2}\Phi(-z)\cdot\Phi'(-z)-\sum_{n=1}^{\infty}y_n\Phi(-y_n)\Phi'(-y_n)+$$
$$\left.+z^2\Phi'^2(-z)+2\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2\Phi'^2(-y_n)\right\}, \tag{9}$$

где Φ — функция Эйри [4, 7, 8], Φ' — ее производная, а χ и μ — нерелятивистские параметры, подробно описанные в [5]:

$$\chi=\chi_0(2I)^{-3/2},\quad \mu=\mu_0(2I)^{-1},\quad z=(2\chi)^{-2/3},$$

$$z_n=(2\chi)^{-2/3}(1-4\mu n),\quad y_n=(2\chi)^{-2/3}(1-2\mu n).$$

Важно, что полученные формулы не содержат других полевых параметров. В суммах (7)–(9) аргумент функций Эйри изменяется с шагом, соответствующим энергетической щели в уровнях Ландау, нормированной на характерную работу постоянного скрещенного поля на комптоновской длине волны легкой заряженной частицы.

При выводе этих соотношений малость величин χ_0 и μ_0 не предполагалась, но следует иметь в виду, что их значения ограничены характером рассматриваемого нерелятивистского приближения. Параметры же χ и μ произвольны, ибо в нерелятивистском пределе I может быть сколь угодно малым. Важно, что формулы (7)–(9) описывают изучаемые реакции как при $I>0$, так и при $I<0$, когда процессы без участия внешнего поля невозможны. Отметим, что при рассмотрении процессов ионизации атомов и фотопоглощения непроводящих кристаллов в интенсивных электромагнитных полях случаи $I>0$, $I<0$ называют режимами осцилляций и туннелирования соответственно. Из формул (7)–(9) легко получить известные выражения для предельных случаев $\mu\ll\chi$ и $\chi\ll\mu$.

При $\chi\ll\mu$ в (7)–(9) можно воспользоваться первыми членами асимптотических разложений функций Эйри

$$\Phi(x)\underset{x\to-\infty}{\approx}\frac{\pi^{1/2}}{(-x)^{1/4}}\sin\left[\frac{2}{3}(-x)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right],$$
$$\Phi(x)\underset{x\to\infty}{\approx}\frac{\pi^{1/2}}{2x^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

Ограничиваясь главными членами рассматриваемых выражений в пределе $\chi\to 0$, можно получить

$$W^+/W_0^+\underset{\chi\ll\mu}{\approx}\mu\left[1+2\sum_{n=1}^{N}(1-4\mu n)^{-1/2}\right], \tag{10}$$

$$W^-/W_0^-\underset{\chi\ll\mu}{\approx}12\mu^2\sum_{n=1}^{N}n(1-4\mu n)^{-1/2}, \tag{11}$$

$$W^\beta/W_0^\beta\underset{\chi\ll\mu}{\approx}\frac{7}{2}\mu\left[1+2\sum_{n=1}^{N}(1-2\mu n)^{5/2}\right], \tag{12}$$

где N — целая часть числа $(1/4\mu)$ в (10), (11) и числа $(1/2\mu)$ в (12), что соответствует количеству членов в этих формулах, для которых выражение в круглых скобках под знаком суммы положительно. Полученные соотношения совпадают как с квантовоэлектродинамическими результатами, найденными одним из авторов другим способом [4, 5], так и с аналогичными выражениями для межзонных переходов, известными в теории полупроводников [6]. Осциллирующее поведение правых частей (10)–(11), связанное с изменением числа уровней Ландау, подробно описано в работе [4]. Здесь упомянем лишь, что выражение (12), в отличие от ранее рассмотренных формул (10) и (11), не содержит расходимостей.

Переход к пределу $\mu \ll \chi$ менее тривиален. Заметим, что в физике полупроводников он составляет проблему, под которую даже подводится физическое обоснование [6]. Между тем выражения (7)–(9) также позволяют достаточно легко провести этот предельный переход, причем независимо от знака энерговыделения. В рассматриваемом пределе $\mu \to 0$ можно воспользоваться формулой суммирования Эйлера [1] и ограничиться главным интегральным членом. Тогда для вероятностей исследуемых процессов имеем:

$$W^+/W_0^+ \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{1}{\pi} z^{-1/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx\, \Phi^2(x), \tag{13}$$

$$W^-/W_0^- \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{3}{2\pi} z^{-3/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx\, (x+z)\Phi^2(x), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} W^\beta/W_0^\beta \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{7}{2\pi} z^{-7/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx\, \times \\ \times \left[\left(\frac{3}{8} - x^3\right)\Phi^2(x) + \frac{x}{2}\Phi(x)\Phi'(x) + x^2\Phi'^2(x)\right]. \end{gathered} \tag{15}$$

Вычисляя интегралы в правых частях полученных формул, окончательно получаем известные результаты квантовой электродинамики для скрещенного поля с одинаковыми электрической и магнитной составляющими [3, 4, 8] и соотношения из теории фотопоглощения полупроводников (формулы Келдыша–Франца [5, 6]):

$$W^+/W_0^+ \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{1}{\pi}\left[z^{1/2}\Phi^2(-z) + z^{-1/2}\Phi'^2(-z)\right],$$

$$\begin{gathered} W^-/W_0^- \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{1}{\pi}\Big[z^{1/2}\Phi^2(-z) + z^{-1/2}\Phi'^2(-z) - \\ -\chi(2I)^{-3/2}\Phi(-z)\Phi'(-z)\Big], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} W^\beta/W_0^\beta \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{1}{\pi}\left[z^{1/2}\left(1 + \frac{21}{32}\frac{\chi^2}{I^3}\right)\Phi^2(-z) + z^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{15}{32}\frac{\chi^2}{I^3}\right)\Phi'^2(-z) - \chi(2I)^{-3/2}\Phi(-z)\Phi'(-z)\right]. \end{gathered}$$

В заключение заметим следующее.

1. Формулы (7)–(9) можно представить в виде, отчетливо выделяющем роль двух составляющих внешнего поля изучаемой конфигурации:

$$\begin{gathered} W^+/W_0^+ \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{2}{\pi}\mu z^{1/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx\, \Phi^2(x) \times \\ \times \left[\delta(x+z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x+z_n)\right], \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} W^-/W_0^- \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{6}{\pi}\mu z^{-1/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx\, (x+z)\Phi^2(x) \times \\ \times \left[\delta(x+z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x+z_n)\right], \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} W^\beta/W_0^\beta \underset{\mu\ll\chi}{\approx} \frac{7}{2\pi}\mu z^{-5/2} \int\limits_{-z}^{\infty} dx \times \\ \times \left[\left(\frac{3}{8} - x^3\right)\Phi^2(x) + \frac{x}{2}\Phi(x)\Phi'(x) + x^2\Phi'^2(x)\right] \times \\ \times \left[\delta(x+z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x+y_n)\right], \end{gathered} \tag{18}$$

где $\delta(x_n)$ — дельта-функции от соответствующих аргументов. Видно, что в интегралах по спектральной переменной x, описывающих влияние на процесс постоянного скрещенного поля, появляются уровни Ландау, задаваемые продольным магнитным полем, которые вырезают дискретный ряд значений. Отметим, что подобная ситуация сохраняется для пороговых реакций и в более общем случае волнового поля конфигурации Редмонда.

2. Сопоставление формул (13)–(15) и (16)–(18) указывает на то, что имеет место достаточно общий и простой алгоритм перехода от ряда известных результатов для скрещенного поля с $E = H_t$ к случаю изучаемого нами скрещенного поля общего вида (длинноволновый предел поля конфигурации Редмонда). Для этого достаточно записать вероятности процессов в интегральной форме, подобной (13)–(15), и внести под интеграл сомножитель, содержащий дельта-функции, типа

$$\frac{\Delta x}{2}\left[\delta(x+z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x - n\Delta x + z)\right]$$

с характерной для данного процесса энергетической щелью Δx между уровнями Ландау.

Авторы благодарны В.Р. Халилову за ценные замечания и И.Г. Попковой за помощь в работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-02-17936).

Литература

1. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
2. *Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
3. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // УФН. 1998. **168**, № 5. С. 531.
4. *Родионов В.Н.* // ЖЭТФ. 1998. **113.** С. 21.
5. *Родионов В.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 2. С. 5 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 2. P. 5).
6. *Ансельм А.И.* Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
7. *Родионов В.Н.* // ЖЭТФ. 1997. **111**. С. 3.
8. *Ритус В.И.* // Тр. ФИАН. Т. 111. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
08.12.00

УДК 519.6:517.584

ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. П. Моденов

(*кафедра математики*)

Дан рекуррентный способ нахождения нулей сферических функций Бесселя и их производных путем редукции к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью.

Введение

Сферические функции Бесселя [1, 2] играют важную роль в математической физике. Поэтому проблема эффективного нахождения их нулей и нулей их производных остается всегда актуальной.

Значения нулей сферических функций Бесселя и их производных используются при решении самых разных научных и практических задач. Например, нули сферической функции Бесселя первого рода и ее производной определяют собственные значения соответственно первой и второй краевых задач для шара [3], нули этой функции характеризуют частоты собственных колебаний сферического акустического резонатора [4] и сферического электромагнитного резонатора с идеально проводящей поверхностью [5].

В настоящей работе предлагается эффективный алгоритм вычисления нулей сферических функций Бесселя и их производных, основанный на рекуррентных соотношениях [6] для этих функций и применении дифференциально-параметрического метода [7].

1. Дифференциально-полиномиальное свойство

Как известно [6], сферические функции Бесселя

$$w = w_i(z) \quad (i \text{ — целое})$$

являются решениями дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{dw}{dz} + \left[1 - \frac{i\,(i+1)}{z^2}\right] w = 0$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, связывающим эти функции различных индексов с их производными:

$$w_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{z} w_i(z) - w_{i-1}(z) = \qquad (1)$$

$$= -z^i \frac{d}{dz}\left[z^{-i} w_i(z)\right]. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию, равную отношению сферических функций Бесселя соседних порядков,

$$M_i(z) = \frac{w_i(z)}{w_{i-1}(z)}. \qquad (3)$$

Для этой функции выполняется дифференциально-полиномиальное свойство (ДП-свойство [7]), т. е. производная функции выражается в виде полинома от самой функции.

В самом деле,

$$M_i'(z) = \frac{w_i'(z)\, w_{i-1}(z) - w_i(z)\, w_{i-1}'(z)}{w_{i-1}^2(z)}. \qquad (4)$$

Используя рекуррентные формулы (1) и (2), выразим производные через функции

$$w_i'(z) = w_{i-1}(z) - \frac{i+1}{z} w_i(z), \qquad (5)$$