

Авторы благодарны В.Р. Халилову за ценные замечания и И.Г. Попковой за помощь в работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-02-17936).

#### Литература

1. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
2. Тернов И.М., Халилов В.Р., Родионов В.Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

3. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. // УФН. 1998. **168**, № 5. С. 531.
4. Родионов В.Н. // ЖЭТФ. 1998. **113**. С. 21.
5. Родионов В.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 2. С. 5 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 2. P. 5).
6. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978.
7. Родионов В.Н. // ЖЭТФ. 1997. **111**. С. 3.
8. Ритус В.И. // Тр. ФИАН. Т. 111. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию  
08.12.00

УДК 519.6:517.584

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. П. Моденов

(кафедра математики)

Дан рекуррентный способ нахождения нулей сферических функций Бесселя и их производных путем редукции к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью.

#### Введение

Сферические функции Бесселя [1, 2] играют важную роль в математической физике. Поэтому проблема эффективного нахождения их нулей и нулей их производных остается всегда актуальной.

Значения нулей сферических функций Бесселя и их производных используются при решении самых разных научных и практических задач. Например, нули сферической функции Бесселя первого рода и ее производной определяют собственные значения соответственно первой и второй краевых задач для шара [3], нули этой функции характеризуют частоты собственных колебаний сферического акустического резонатора [4] и сферического электромагнитного резонатора с идеально проводящей поверхностью [5].

В настоящей работе предлагается эффективный алгоритм вычисления нулей сферических функций Бесселя и их производных, основанный на рекуррентных соотношениях [6] для этих функций и применении дифференциально-параметрического метода [7].

#### 1. Дифференциально-полиномиальное свойство

Как известно [6], сферические функции Бесселя

$$w = w_i(z) \quad (i - \text{целое})$$

являются решениями дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + \left[ 1 - \frac{i(i+1)}{z^2} \right] w = 0$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, связывающим эти функции различных индексов с их производными:

$$w_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{z} w_i(z) - w_{i-1}(z) = \quad (1)$$

$$= -z^i \frac{d}{dz} [z^{-i} w_i(z)]. \quad (2)$$

Рассмотрим функцию, равную отношению сферических функций Бесселя соседних порядков,

$$M_i(z) = \frac{w_i(z)}{w_{i-1}(z)}. \quad (3)$$

Для этой функции выполняется дифференциально-полиномиальное свойство (ДП-свойство [7]), т. е. производная функции выражается в виде полинома от самой функции.

В самом деле,

$$M_i'(z) = \frac{w_i'(z) w_{i-1}(z) - w_i(z) w_{i-1}'(z)}{w_{i-1}^2(z)}. \quad (4)$$

Используя рекуррентные формулы (1) и (2), выразим производные через функции

$$w_i'(z) = w_{i-1}(z) - \frac{i+1}{z} w_i(z), \quad (5)$$

$$w'_{i-1}(z) = \frac{i-1}{z} w_{i-1}(z) - w_i(z). \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и воспользовавшись представлением (3), получим ДП-свойство функции (3) в виде

$$M'_i(z) = M_i^2(z) - \frac{2i}{z} M_i(z) + 1. \quad (7)$$

## 2. Алгоритм вычисления нулей сферических функций Бесселя

Вычислим нули функции  $w_{i+1}(z)$ , считая нули функции  $w_i(z)$  известными.

Пусть  $x$  — искомый нуль функции  $w_{i+1}(z)$ . Тогда из рекуррентного соотношения (1) получим

$$\frac{2i+1}{x} w_i(x) - w_{i-1}(x) = 0. \quad (8)$$

Воспользовавшись обозначением (3), уравнение (8) запишем в виде

$$M_i(x) = \frac{x}{2i+1}. \quad (9)$$

Введем параметр  $t \in [0; 1]$  и рассмотрим уравнение

$$M_i(z) = t \frac{z}{2i+1}. \quad (10)$$

При  $t = 1$  это уравнение совпадает с (9). Следовательно, считая  $z$  функцией параметра  $t$ , неявно заданной уравнением (10), получим, что искомый корень  $x$  уравнения (9), а значит, и (8) равен значению функции  $z(t)$  при  $t = 1$ . При  $t = 0$  корни уравнения (10) или, что то же самое, нули функции  $w_i(z)$ , как предполагалось, нам известны.

Применяя теорему о производной неявно заданной функции и воспользовавшись ДП-свойством (7), для нахождения  $x = z(1)$  получим задачу Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{(2i+1)z}{z^2 t^2 + (2i+1)^2(1-t)} & (0 \leq t \leq 1), \\ z(0) = x_i, \end{cases} \quad (11)$$

где  $x_i$  — нуль функции  $w_i(z)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Таким образом, задача Коши (11), (12) выражает рекуррентно нули функции  $w_{i+1}$  через нули функции  $w_i$ .

## 3. Вычисление нулей сферических функций Бесселя первого и второго рода

Применим алгоритм для вычисления нулей сферических функций Бесселя первого рода:

$$w_i(z) = j_i(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{i+1/2}(z),$$

где  $J_{i+1/2}(z)$  — функция Бесселя полуцелого порядка.

Поскольку

$$w_0(z) = j_0(z) = \frac{\sin z}{z},$$

то ее нули известны и равны

$$x_0 = x_{0,p} = p\pi \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Подставляя их в начальное условие (12) и решая задачу Коши (11), (12), найдем нули  $x_1 = x_{1,p}$  функции  $j_1(z)$ .

Подставляя  $x_1 = x_{1,p}$  в (12), находим нули  $x_2 = x_{2,p}$  функции  $j_2(z)$  и т. д.

В табл. 1 приведены посчитанные с точностью  $10^{-4}$  по данному алгоритму несколько нулей функции  $j_i(z)$ .

Аналогично вычисляются нули сферической функции Бесселя второго рода:

$$w_i(z) = n_i(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{i+1/2}(z),$$

где  $N_{i+1/2}(z)$  — функция Неймана полуцелого порядка.

Поскольку

$$w_0(z) = n_0(z) = -\frac{\cos z}{z},$$

то нули функции  $w_0(z) = n_0(z)$  известны и равны

$$x_0 = x_{0,p} = p\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя их в начальное условие (12) и решая задачу Коши (11), (12), найдем нули  $x_1 = x_{1,p}$  функции  $n_1(z)$ .

Подставляя  $x_1 = x_{1,p}$  в (12), находим нули  $x_2 = x_{2,p}$  функции  $n_2(z)$  и т. д.

В табл. 2 приведены посчитанные с точностью  $10^{-4}$  по данному алгоритму несколько нулей функции  $n_i(z)$ .

Т а б л и ц а 1

Нули функции  $j_i(z)$

$i$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
1	4.4934	7.7252	10.9041
2	5.7634	9.0950	12.3229

Т а б л и ц а 2

Нули функции  $n_i(z)$

$i$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
1	2.7983	6.1212	9.3178
2	3.9595	7.4516	10.7156

#### 4. Вычисление нулей производных сферических функций Бесселя

Аналогично предыдущему вычислим нули производной  $w'_i(z)$ , считая нули функции  $w_i(z)$  известными.

Пусть  $x$  — искомый нуль производной  $w'_i(z)$ . Тогда из рекуррентного соотношения (5) имеем:

$$w'_i(x) = w_{i-1}(x) - \frac{i+1}{x} w_i(x) = 0.$$

В силу обозначения (3) для нахождения нуля производной  $w'_i(z)$  получим уравнение

$$M_i(z) = \frac{z}{i+1}. \quad (13)$$

Введем параметр  $t \in [0; 1]$  и рассмотрим уравнение, совпадающее при значении параметра  $t = 1$  с уравнением (13),

$$M_i(z) = t \frac{z}{i+1}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) при  $t = 1$  даст решение уравнения (13), совпадающее с искомым нулем производной  $w'_i(z)$ . По теореме о производной неявно заданной функции  $z = z(t)$ , используя ДП-свойство функции  $M_i(z)$  (7), этот нуль  $x = z(1)$  находим

при решении задачи Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{(i+1)z}{z^2 t^2 - (2i+1)(i+1)t + (i+1)^2} & (0 \leq t \leq 1), \\ z(0) = x_i, \end{cases}$$

где  $x_i$  — нуль функции  $w_i(z)$ , который считаем известным.

#### Литература

1. Ватсон Д.Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.
2. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1953.
4. Рэлей Дж. Теория звука. М., 1955.
5. Бройль Л. де. Электромагнитные волны в волноводах и резонаторах. М., 1948.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
7. Моденов В.П. // ДАН СССР. 1987. 296. № 3. С. 536.

Поступила в редакцию  
18.12.00

УДК 539.12.01

## МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ И ФЕРМИОННЫЕ НУЛЕВЫЕ МОДЫ

В. Ч. Жуковский, И. В. Мамсуров

(кафедра теоретической физики)

E-mail: th180@phys.msu.su

**Рассмотрено понятие спиральности магнитного поля и ее связь с топологическим зарядом Черна-Саймонса исходной неабелевой чисто калибровочной конфигурации полей. Получены решения уравнения Дирака, соответствующие нулевым модам, и исследованы их свойства.**

#### Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию топологических свойств решений уравнений поля для калибровочных бозонов и фермионов в различных конфигурациях внешних фоновых полей. Этот интерес связан с возможностью непрерывного отображения пространств разной или одинаковой размерности друг на друга. При этом понятие топологического заряда играет важную роль (см., напр., [1]).

Так, в случае 4-мерного евклидова пространства топологический заряд характеризует свойства отображения трехмерной сферы в этом пространстве на групповое пространство калибровочной группы

$SU(2)$  при условии, что расстояние в евклидовом пространстве  $\sqrt{x_E^2} \rightarrow \infty$ . Это условие вытекает из требования конечности 4-мерного интеграла, определяющего действие калибровочного поля, что равносильно, в свою очередь, требованию, чтобы потенциал на бесконечности представлял собой чистую калибровку.

С другой стороны, оказалось, что и абелевы конфигурации калибровочных полей могут иметь нетривиальные топологические характеристики. Так, в работе [2] было получено абелево магнитное поле с нетривиальной спиральностью из неабелева вакуумного поля группы  $SU(2)$ .