

#### 4. Вычисление нулей производных сферических функций Бесселя

Аналогично предыдущему вычислим нули производной  $w'_i(z)$ , считая нули функции  $w_i(z)$  известными.

Пусть  $x$  — искомый нуль производной  $w'_i(z)$ . Тогда из рекуррентного соотношения (5) имеем:

$$w'_i(x) = w_{i-1}(x) - \frac{i+1}{x}w_i(x) = 0.$$

В силу обозначения (3) для нахождения нуля производной  $w'_i(z)$  получим уравнение

$$M_i(z) = \frac{z}{i+1}. \tag{13}$$

Введем параметр  $t \in [0; 1]$  и рассмотрим уравнение, совпадающее при значении параметра  $t = 1$  с уравнением (13),

$$M_i(z) = t \frac{z}{i+1}. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) при  $t = 1$  даст решение уравнения (13), совпадающее с искомым нулем производной  $w'_i(z)$ . По теореме о производной неявно заданной функции  $z = z(t)$ , используя ДП-свойство функции  $M_i(z)$  (7), этот нуль  $x = z(1)$  находим

при решении задачи Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру и алгебраической правой частью [7]:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{(i+1)z}{z^2t^2 - (2i+1)(i+1)t + (i+1)^2} & (0 \leq t \leq 1), \\ z(0) = x_i, \end{cases}$$

где  $x_i$  — нуль функции  $w_i(z)$ , который считаем известным.

#### Литература

1. *Ватсон Д.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Рэлей Дж.* Теория звука. М., 1955.
5. *Бройль Л. де.* Электромагнитные волны в волноводах и резонаторах. М., 1948.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.
7. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**. № 3. С. 536.

Поступила в редакцию  
18.12.00

УДК 539.12.01

### МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ И ФЕРМИОННЫЕ НУЛЕВЫЕ МОДЫ

**В. Ч. Жуковский, И. В. Мамсуров**

(кафедра теоретической физики)

E-mail: th180@phys.msu.su

**Рассмотрено понятие спиральности магнитного поля и ее связь с топологическим зарядом Черна-Саймонса исходной неабелевой чисто калибровочной конфигурации полей. Получены решения уравнения Дирака, соответствующие нулевым модам, и исследованы их свойства.**

#### Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию топологических свойств решений уравнений поля для калибровочных бозонов и фермионов в различных конфигурациях внешних фоновых полей. Этот интерес связан с возможностью непрерывного отображения пространств разной или одинаковой размерности друг на друга. При этом понятие топологического заряда играет важную роль (см., напр., [1]).

Так, в случае 4-мерного евклидова пространства топологический заряд характеризует свойства отображения трехмерной сферы в этом пространстве на групповое пространство калибровочной группы

$SU(2)$  при условии, что расстояние в евклидовом пространстве  $\sqrt{x_E^2} \rightarrow \infty$ . Это условие вытекает из требования конечности 4-мерного интеграла, определяющего действие калибровочного поля, что равносильно, в свою очередь, требованию, чтобы потенциал на бесконечности представлял собой чистую калибровку.

С другой стороны, оказалось, что и абелевы конфигурации калибровочных полей могут иметь нетривиальные топологические характеристики. Так, в работе [2] было получено абелево магнитное поле с нетривиальной спиральностью из неабелева вакуумного поля группы  $SU(2)$ .

Было показано, что величина спиральности поля совпадает со значением топологического заряда начального неабелева поля. Согласно теореме Атья–Зингера [3], топологический заряд (индекс Понтрягина) конфигурации калибровочных полей равняется разности между числом право- и левовинтовых решений уравнения Дирака, соответствующих нулевой энергии, которые получены с учетом глобальных граничных условий в данных полевых конфигурациях. Локальные граничные условия вносят поправки в указанное равенство. В частности, в работах [4] и [5] эта теорема была установлена для случая двумерного диска с ненулевой азимутальной компонентой полевого потенциала. Кроме того, в статье [6] было замечено, что теорема Атья–Зингера может быть применена как к компактному многообразию, так и к 4-мерному евклидову пространству с предположением, что поля убывают достаточно быстро с расстоянием.

Как хорошо известно, фермионные нулевые моды играют важную роль в квантовой теории поля, оказывая основное влияние на фермионный определитель, входящий в фундаментальный фейнмановский интеграл квантовой хромодинамики (КХД). Они, в частности, ответственны за нарушение киральной симметрии. Невырожденные нулевые моды уравнения Дирака были исследованы в статье [7]. Было показано, что присутствие этих мод ведет к вырождению солитонного решения для полей Янга–Миллса, которое в этом случае оказывается дублетом с фермионным числом 1/2.

С математической точки зрения связь между решениями уравнения Дирака и топологическими свойствами фонового поля представляет значительный интерес. В работе [8] было показано, что существует соотношение между дираковскими нулевыми модами и так называемым отображением Хопфа. Это отображение осуществляет проектирование сферы  $S^3$  на сферу  $S^2$ , представляя собой пример упомянутого выше непрерывного отображения. Оказалось, что после наложения определенных условий на отображение Хопфа его параметры могут быть использованы для определения как потенциала калибровочного поля, так и решений уравнения Дирака в этом поле. Более того, число нулевых мод, полученное этим путем, очень просто соотносится с величиной индекса соответствующего отображения, а величины полей (после вычитания некоторого фонового поля) совпадают с кривизной отображения Хопфа.

В настоящей статье мы, задавшись целью исследовать фермионные нулевые моды в присутствии абелевой полевой конфигурации, предложенной в работе [2], рассмотрели возможность обобщения задачи [2] на случай перехода к 4-мерному пространству-времени и обнаружили новые нетривиальные решения уравнения Дирака с нулевой массой.

## 1. Магнитная спиральность

Магнитные поля с ненулевой спиральностью могут быть получены из неабелева вакуумного калибровочного потенциала  $A_i$  группы  $SU(2)$  в случае чистой калибровки  $U$ , когда

$$A_i = U^{-1} \partial_i U,$$

где  $i = 1, 2, 3$  (мы рассматриваем статические поля при условии  $A_0 = 0$ ). Тогда число Черна–Саймонса для калибровочного поля  $A_i$

$$N_{CS} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} (A_i^a \partial_j A_k^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_i^a A_j^b A_k^c)$$

совпадает с топологическим зарядом поля  $A_i$ , соответствующим кратности отображения 3-мерного пространства на калибровочную группу:

$$W(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} U^{-1} \partial_i U U^{-1} \partial_j U U^{-1} \partial_k U. \quad (1)$$

Абелево магнитное поле может быть построено (см. [2]) из такой неабелевой вакуумной калибровочной конфигурации путем проектирования последней на заданное направление в изопространстве, характеризующееся постоянным единичным вектором  $n^a$ :

$$a_i = i \operatorname{tr}(n^a \sigma^a U^{-1} \partial_i U).$$

Можно показать, что величина магнитной спиральности данного магнитного поля

$$H(a) = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} a_i \partial_j a_k$$

совпадает с числом обмоток отображения  $U$ , т.е.  $H(a) = W(U)$  (1). Неабелев вакуумный калибровочный потенциал, соответствующий калибровке

$$U = e^{\omega^a T^a}, \quad T^a = \sigma^a / 2i,$$

может быть задан путем выбора  $\omega^a$  в простом виде:

$$\omega^a = \hat{\omega}^a f,$$

где  $\hat{\omega}^a$  представляет собой единичный вектор в изопространстве, совпадающий с радиус-вектором в конфигурационном 3-мерном пространстве:  $\hat{\omega}^a = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , и  $f = f(r)$  является функцией только от  $r$ .

Полагая, что единичный вектор  $n^a$  направлен по третьей оси:  $n^a = (0, 0, 1)$ , мы получаем векторный потенциал  $a_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) в следующем виде [2]:

$$a_0 = 0; \quad a_r = f'(r) \cos \theta; \\ a_\theta = -\frac{\sin f}{r} \sin \theta; \quad a_\phi = -\frac{1 - \cos f}{r} \sin \theta,$$

где  $f'(r) = df/dr$ , а  $r, \theta, \phi$  — сферические координаты.

## 2. Нулевые моды уравнения Дирака

Рассмотрим решения уравнения Дирака для безмассовых фермионов ( $m = 0$ ) в присутствии фонового магнитного поля с ненулевой магнитной спиральностью. Тогда уравнение Дирака может быть записано в следующей форме:

$$i\alpha_i D_i \psi = iD_0 \psi$$

$$(iD_i = i\partial_i - eA_i; \quad i = 1, 2, 3; \quad iD_0 = i\partial_0 - eA_0).$$

В спинорном представлении имеем:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}.$$

Для случая  $m = 0$  лево- и правовинтовые компоненты разделяются:

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi.$$

Для каждой из этих компонент получаем

$$\begin{aligned} (D_z \mp D_t)\psi_1^{L,R} + (D_1 - iD_2)\psi_2^{L,R} &= 0, \\ (D_1 + iD_2)\psi_1^{L,R} - (D_z \pm D_t)\psi_2^{L,R} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где знак плюс соответствует левовинтовой компоненте, а минус — правовинтовой.

В нашем случае выберем калибровочный потенциал в том же виде, как и в [2], однако добавим к нему еще временную компоненту с условием, что  $A_0 = -A_z$ . Кроме того, в аргументе потенциала мы произведем замену  $z \rightarrow \xi = t - z$ . Заметим, что после указанных изменений потенциал  $A_\mu$  удовлетворяет калибровочному условию Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

а уравнение Дирака для правовинтовой компоненты может быть решено аналитическими методами.

Другой выбор:  $A_0 = A_z$  и  $z \rightarrow \xi = t + z$  приводит соответственно к тому, что решаемым становится уравнение для левовинтовой компоненты. Таким образом, благодаря цилиндрической симметрии задачи можно перейти к цилиндрическим координатам  $(\rho, \phi, z)$ , и мы получаем в общем случае

$$A_0 = -f' + \frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right),$$

$$A_r = \frac{\xi r}{\xi^2 + \rho^2} \left( f' - \frac{\sin f}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right),$$

$$A_\phi = -\frac{\rho}{\rho^2 + \xi^2} (1 - \cos f),$$

$$A_z = -A_0.$$

Здесь, как и раньше,  $f = f(r)$ , а штрихи означают дифференцирование по переменной  $r$ .

Магнитная спиральность такого поля остается не зависящей от времени и совпадает со спиральностью, рассмотренной в работе [2]. Ищем решение в виде

$$\psi^R = \begin{pmatrix} e^{il\phi} \psi_1 \\ e^{i(l+1)\phi} \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание, что в цилиндрических координатах

$$\sigma \mathbf{D} = \sigma_\rho D_\rho + \sigma_\phi D_\phi + \sigma_z D_z,$$

где

$$\sigma_\rho = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\phi = -i \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем следующую форму уравнения (2), записанного для правовинтовой компоненты:

$$\begin{aligned} i(\partial_t - \partial_z)\psi_1 + \left( i\partial_\rho + \frac{i(l+1)}{\rho} - \frac{\xi\rho}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right) - \frac{i\rho}{\rho^2 + \xi^2} (1 - \cos f) \right) \psi_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( i\partial_\rho - \frac{il}{\rho} - \frac{\xi\rho}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right) + \frac{i\rho}{\rho^2 + \xi^2} (1 - \cos f) \right) \psi_1 + \\ + \left( i\partial_t - i\partial_z + 2f' - \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right) \right) \psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что для получения нормируемого решения мы должны положить  $\psi_2 = 0$ .

Будем искать решение в виде  $\psi_1 = \psi_1(t - z, \rho)$ . Тогда, поскольку в этом случае  $(\partial_z + \partial_t)\psi_1 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \left( \partial_\rho - \frac{l}{\rho} + \frac{i\xi\rho}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right) + \frac{\rho}{\rho^2 + \xi^2} (1 - \cos f) \right) \psi_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решение последнего уравнения можно записать в интегральной форме:

$$\psi_1 = F(\xi)\rho^l \exp \left\{ - \int d\rho \left( \frac{\rho}{\rho^2 + \xi^2} (1 - \cos f) + \frac{i\xi\rho}{\rho^2 + \xi^2} \left( f' - \frac{\sin f}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} \right) \right) \right\}. \quad (3)$$

Здесь  $F(\xi)$  является произвольной функцией  $\xi$ .

Мы рассмотрим два конкретных вида функций  $f$ , которые фигурировали в работе [2]:

$$f = 2 \operatorname{arctg} \frac{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}}{\rho_0}, \quad \rho_0 = \text{const},$$

что соответствует полуцелому значению топологического заряда:  $N_{CS} = 1/2$ , и

$$f = 4 \operatorname{arctg} \frac{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}}{\rho_0},$$

что соответствует целому его значению:  $N_{CS} = 1$ .

Начнем с первого случая. Тогда векторный потенциал приобретет следующую форму:

$$\begin{aligned} A_\rho &= 0, \\ A_\phi &= -\frac{2\rho}{\rho^2 + \xi^2 + \rho_0^2}, \\ A_z &= \frac{2\rho_0}{\rho^2 + \xi^2 + \rho_0^2}, \\ A_0 &= -A_z. \end{aligned}$$

При этом интеграл, стоящий в аргументе экспоненты, может быть вычислен в явном виде, и мы получаем

$$\psi_1 = F(\xi) \frac{\rho^l}{\rho^2 + \xi^2 + \rho_0^2}.$$

Данное решение не будет иметь особенностей при  $\rho = 0$ , если положить  $l = 0$ , и его можно сделать нормируемым, если потребовать, чтобы  $|F(\xi)|$  росло на бесконечности медленнее, чем  $\xi^{1/2}$ . В результате получаем нормированное решение:

$$\psi_1 = \frac{F(\xi)}{\rho^2 + \xi^2 + \rho_0^2},$$

где  $F(\xi)$  удовлетворяет упомянутому выше условию.

К сожалению, при втором выборе функции  $f$  результаты будут менее обнадеживающими. В этом случае потенциал имеет вид

$$A_\rho = \frac{8\rho_0\rho\xi}{(\rho_0^2 + \rho^2 + \xi^2)^2},$$

$$A_\phi = -\frac{8\rho_0\rho\xi}{(\rho_0^2 + \rho^2 + \xi^2)^2},$$

$$A_0 = \frac{4\rho_0(\rho^2 - \rho_0^2 - \xi^2)}{(\rho^2 + \xi^2 + \rho_0^2)^2},$$

$$A_z = -A_0.$$

Интеграл в аргументе экспоненты (3) также вычисляется, и в результате мы находим

$$\psi_1 = F(\xi)\rho^l \exp \left\{ -\frac{2\rho_0(2i\xi + \rho_0)}{\rho_0^2 + \rho^2 + \xi^2} \right\}.$$

Данное решение, как видно, невозможно сделать нормируемым ни при каких значениях  $F(\xi)$  и  $l$ .

### Заключение

Полученные выше решения уравнения Дирака, отвечающие нулевой энергии, имеют форму плоской волны, распространяющейся в направлении оси  $z$ . Эти решения зависят от произвольной функции  $F(\xi)$  и значения  $l$ . Частный вид этой функции может быть найден после выбора соответствующих дополнительных условий, налагаемых на поведение дираковской волновой функции. В наиболее простом случае, когда  $F = \text{const}$  и  $l = 0$ , поверхности уровня такого решения имеют форму сферы, центр которой распространяется со скоростью света. Следует отметить, что нормируемое решение удалось получить только при одном выборе функции  $f$ , соответствующем полуцелому топологическому заряду. То обстоятельство, что выбор этой функции, отвечающий целому заряду, не дает возможности получить решение с конечной нормой, является достаточно неожиданным и представляет интерес для дальнейшего исследования.

### Литература

1. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
2. Jackiw R., So-Young Pi. E-print Archive: hep-th/9811077.
3. Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. **77**. P. 43; 1976. **79**. P. 71; Eguchi T., Gilkey P., Hanson A. // Phys. Reports. 1980. **66**. P. 213.
4. Ninomiya M., Tan C. // Nucl. Phys. 1985. **B257**. P. 199.
5. Zhong-Qi Ma. // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. **19**. L321.
6. Jackiw R., Rebbi C. // Phys. Rev. 1977. **D16**. P. 1052.
7. Jackiw R., Rebbi C. // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 3398.
8. Adam C., Muratori B., Nash C. E-print Archive: hep-th/0001164.

Поступила в редакцию  
17.01.01