13. *Fano U.* // Phys. Rev. 1961. **124**. P. 1866.

14. *Feshbach H.* // Ann. of Phys (N.Y.). 1958. **5**. P. 357.

15. *Балашов В.В., Грум-Гржимайло А.Н., Долинов В.К.* и др. Теоретический практикум по ядерной и атомной физике. М.: Энергоатомиздат, 1984.

16. *Balashov V.V., Grum-Grzhimailo A.N., Kabachnik N.M.* Polarization and Correlation Phenomena in Atomic Collisions. N.Y.: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2000.

17. *Shore B.W.* // J. Opt. Soc. Am. 1967. **57**. P. 881.

Поступила в редакцию
13.12.00

РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246, 524

ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ФОНА ПРИ АДДИТИВНЫХ НЕГАУССОВСКИХ ПОМЕХАХ

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru

Для резонансных гравитационных антенн разработан локально-оптимальный алгоритм обнаружения слабого стохастического гравитационного фона при разнесенном приеме в условиях минимальной априорной информации о статистических свойствах негауссовских аддитивных помех.

Введение

Обнаружение стохастического гравитационного фона (СГФ) активно обсуждается в литературе [1–3]. Реликтовый СГФ представляет собой результат «большого взрыва» Вселенной. Другим источником СГФ является интерференция отдельных гравитационных импульсов от различных космических источников в Галактике. Поскольку возможное количество таких источников предполагается большим, то при описании СГФ можно воспользоваться асимптотикой Муавра–Лапласа [4] и считать его гауссовским случайным стационарным процессом.

Глобальный характер гравитационного излучения делает возможным разнесенный прием СГФ с помощью антенной системы, образованной двумя гравитационными антеннами (ГА) с близкими резонансными частотами. В работах [2, 3] детально исследована реакция такой системы на СГФ в зависимости от расстояния между ГА. При этом учитывалось различие в их диаграммах направленности, а также две возможные поляризации падающей гравитационной волны.

Аддитивные помехи на выходах отдельных каналов считались независимыми гауссовскими стационарными шумами с известными функциями корреляции. Обнаружение СГФ на фоне этих шумов рассматривалось как проверка гипотезы о существовании коэффициента корреляции между выходами пространственно разнесенных ГА (против альтернативы, что такой корреляции нет). Для ГА «AURIGA» и «NAUTILUS» с одинаковыми резонансными частотами $\Omega_1 = \Omega_2 \approx 920$ Гц, разнесенными на расстояние $L \approx 400$ км, спектральная плотность пересчитанного ко входу шума ГА в полосе пропускания системы $\gamma \approx 5 \div 10$ Гц составляет $G_{in}(\omega) \approx 10^{-42} \div 10^{-44}$ Гц$^{-1}$. Спектральная плотность $G_{\min}(\Omega_{1,2})$ порогового СГФ при $\Omega_{1,2}L/c \approx 7.7$ оказывается на 2–3 порядка ниже: $G_{\min}(\Omega_{1,2}) \approx 1.7 \cdot 10^{-45}$ Гц$^{-1}$ [3].

При измерении коэффициента корреляции между отдельными каналами не учитывалось наличие заметных негауссовских шумов на выходе криогенных ГА. Поэтому разработка нелинейных алгоритмов обнаружения полезного гравитационного сигнала на фоне аддитивных негауссовских помех несомненно оказывается актуальной. В настоящей работе предложен новый (по отношению к корреляционному анализу) алгоритм обработки гравитационных данных при минимальной априорной информации о статистических свойствах этих шумов: предполагается, что существуют только параметрические оценки неизвестных одномерных плотностей вероятности.

1. Обнаружение СГФ на фоне негауссовских помех

Пусть $x_j(t) = a_j(t)\cos\Omega_j t - b_j(t)\sin\Omega_j t$, $j = 1, 2$, — узкополосные случайные процессы на выходе пространственно разнесенных ГА с близкими резонансными частотами Ω_1 и Ω_2. Случайный процесс $x_j(t)$ можно представить в виде линейной суперпозиции $x_j(t) = \lambda s_j(t) + n_j(t)$ полезного гравитационного сигнала $s_j(t) = u_j(t)\cos\Omega_j t - v_j(t)\sin\Omega_j t$ и аддитивной помехи $n_j(t) = c_j(t)\cos\Omega_j t -$

$d_j(t)\sin\Omega_j t$. Случайная величина λ принимает на интервале наблюдения $(0, T)$ два возможных значения: $\lambda = 1$ при наличии полезного сигнала $\mathbf{s}(t) = [s_1(t)\, s_2(t)]$ и $\lambda = 0$ при его отсутствии. При дальнейшем анализе будем предполагать, что $s_1(t)$ и $s_2(t)$ можно рассматривать как стационарные и стационарно-связанные случайные процессы. Ковариация этих шумовых сигналов в совпадающие моменты времени $K_{12}(0) = \langle s_1(t)s_2(t)\rangle$ ($\langle\ldots\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения) считается известной.

Априорная информация о вероятностных свойствах статистически независимых стационарных шумов $n_{1,2}(t)$ минимальна: известны лишь параметрические оценки плотностей вероятности $W_j(e_j)$ квадратов огибающих $e_j(t) = c_j^2(t) + d_j(t)^2$. В условиях такой априорной недостаточности для обнаружения СГФ $\mathbf{s}(t)$ будем использовать выборку $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_k]$, $k = \overline{1, N}$, элементы $\mathbf{x}_k$ которой статистически независимы и определяются следующим выражением: $\mathbf{x}_k = (a_{1k}, b_{1k}; a_{2k}, b_{2k})$, $a_{jk} = a_j(t_k)$, $b_{jk} = b_j(t_k)$. Безусловное отношение правдоподобия $\overline{\Lambda}$ при обнаружении СГФ $\mathbf{s}(t)$ по этой выборке можно представить в виде $\overline{\Lambda} = \prod_{k=1}^{N} \overline{\Lambda}_k$, $\overline{\Lambda}_k = \langle\Lambda_k\rangle_{u,v}$, где Λ_k — условное отношение правдоподобия,

$$\Lambda_k = \prod_{j=1}^{2} \frac{W_{2,j}(a_{jk} - u_{jk}, b_{jk} - v_{jk})}{W_{2,j}(a_{jk}, b_{jk})},$$

$\langle\ldots\rangle_{u,v}$ — символическая форма записи оператора усреднения по случайным величинам $u_{jk} = u_j(t_k)$, $v_{jk} = v_j(t_k)$, $W_{2,j}(c_j, d_j) = \frac{1}{\pi} W_j(c_j^2 + d_j^2)$ — совместная плотность вероятности квадратурных компонент в совпадающие моменты времени.

При обнаружении слабого СГФ находим

$$\Lambda_k \approx \prod_{j=1}^{2} \{1 + f_j(E_{jk})\,[a_{jk}u_{jk} + b_{jk}v_{jk}]\}, \qquad f_j(E_j) = -2\frac{d\ln W_j(E_j)}{dE_j}, \tag{1}$$

где $E_{jk} = E_j(t_k)$, $E_j(t) = a_j^2(t) + b_j^2(t)$.

Пусть $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1$ — расстройка, $|\Delta| \ll \Omega_{1,2}$. Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} \langle u_1(t)u_2(t)\rangle &= \langle v_1(t)v_2(t)\rangle = 2K_{12}(0)\cos\Delta t, \\ \langle u_1(t)v_2(t)\rangle &= -\langle v_1(t)u_2(t)\rangle = -2K_{12}(0)\sin\Delta t. \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая выражения (1) и (2), приходим к следующей приближенной формуле:

$$\overline{\Lambda}_k \approx 1 + 2f_1(E_{1k})f_2(E_{2k})K_{12}(0) \times \\ \times [(a_{1k}a_{2k} + b_{1k}b_{2k})\cos\Delta t_k (a_{2k}b_{1k} - a_{1k}b_{2k})\sin\Delta t_k].$$

Выходной сигнал Y локально-оптимального [5] приемника пропорционален достаточной статистике $Z = \ln\overline{\Lambda}$ и имеет следующий вид:

$$Y = k_0 Z \approx \sum_{k=1}^{N} f_1(E_{1k})f_2(E_{2k})K_{12}(0) \times \\ \times [(a_{1k}a_{2k} + b_{1k}b_{2k})\cos\Delta t_k + (a_{2k}b_{1k} - a_{1k}b_{2k})\sin\Delta t_k], \tag{3}$$

где k_0 — произвольный масштабный коэффициент.

При $N \gg 1$ сумму в этой формуле можно заменить интегралом, и, следовательно,

$$\begin{aligned} Y \approx \int_0^T & f_1[E_1(t)]f_2[E_2(t)] \times \\ & \times\{[a_1(t)a_2(t) + b_1(t)b_2(t)]\cos\Delta t + \\ & + [a_2(t)b_1(t) - a_1(t)b_2(t)]\sin\Delta t\}\, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Анализ выражений (3), (4) показывает, что локально-оптимальный обнаружитель слабого СГФ при негауссовской помехе представляет собой двухканальный коррелятор, в состав которого входят безынерционные нелинейные преобразователи. Характеристики $f_{1,2}[E_{1,2}]$ этих устройств определяются формулами (1) и зависят от выбранных параметрических оценок неизвестных плотностей вероятности $W_{1,2}(e_{1,2})$. При совпадении резонансных частот обеих ГА (т. е. при $\Delta = 0$) структура локально-оптимального приемника заметно упрощается:

$$Y = \sum_{k=1}^{N} f_1(E_{1k})f_2(E_{2k})K_{12}(0)\,[(a_{1k}a_{2k} + b_{1k}b_{2k})].$$

При гауссовских шумах на выходе ГА плотность вероятности $W_j(e_j)$ определяется следующей формулой: $W_j(e_j) = (2\sigma_j^2)^{-1}\exp\{-e_j/(2\sigma_j^2)\}$, где $\sigma_j^2 = \left\langle n_j^2(t)\right\rangle$ - дисперсия аддитивной помехи в отдельном канале, $e_j = (E_j)_{\lambda=0}$, и, следовательно, $f_j[E_j] = (2\sigma_j^2)^{-1} = \mathrm{const}$. В дальнейшем приемник с такой характеристикой будем рассматривать как гауссовский. Применение гауссовского приемника при негауссовских шумах неизбежно приводит к уменьшению помехоустойчивости системы.

Пусть q_0 и q — отношения сигнал–шум на выходах гауссовского и локально-оптимального приемников при негауссовской помехе. Коэффициент относительной эффективности ρ локально-оптимального приемника по отношению к гауссовскому определяется следующим выражением [4–6]:

$$\rho \approx 2\sigma_1\sigma_2\sqrt{I_1 I_2}, \tag{5}$$

$$I_j = \langle E_j f_j^2(E_j) | \lambda = 0\rangle = \int_0^\infty E_j f_j^2(E_j) W_j(E_j)\, dE_j.$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз отношение сигнал–шум на выходе локально-оптимального обнаружителя больше, чем на выходе гауссовского приемника при негауссовской помехе (размер выборки N предполагается фиксированным).

Рабочие характеристики локально-оптимального приемника — вероятности ложной тревоги α и пропуска β — при негауссовской аддитивной помехе определяются выражением $\chi_{1-\alpha} - \chi_\beta = \rho q_0$, где χ_p — квантиль гауссовского распределения. Так как коэффициент относительной эффективности $\rho \geqslant 1$, то при произвольных шумах и постоянном размере выборки $N \gg 1$ (т.е. при фиксированном отношении сигнал–шум q_0 на выходе гауссовского приемника) применение дополнительного безынерционного нелинейного преобразователя может привести к значительному увеличению вероятности правильного обнаружения СГФ $D = 1 - \beta$.

2. Обнаружение СГФ при аномально-засоренных шумах

Основным источником негауссовских шумов резонансных ГА оказываются хаотические импульсные помехи. Наличие хаотических импульсных помех проявляется в аномальном поведении крыльев эмпирических плотностей вероятности $W_j^*(e_j)$. В теории оптимального приема аддитивный шум при наличии хаотических импульсных помех рассматривается как аномально-засоренный гауссовский случайный процесс [5, 6]. Широкое распространение получила бигауссовская аппроксимация неизвестной плотности вероятности $W_j(e_j)$, для которой

$$\begin{aligned} W_j(E_j) = (1-p_j)\frac{1}{2\sigma_{gj}^2}\exp\left\{-\frac{e_j}{2\sigma_{gj}^2}\right\} + \\ + p_j\frac{1}{2\sigma_{aj}^2}\exp\left\{-\frac{e_j}{2\sigma_{aj}^2}\right\}, \\ \sigma_j^2 = (1-p_j)\sigma_{gj}^2 + p_j\sigma_{aj}^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $0 < p < 1$ — вероятность появления аномалии в произвольный момент времени, σ_{gj}^2 и σ_{aj}^2 — характерные параметры. При $p_j \neq 0$ плотность вероятности (6) существенно отличается от гауссовской.

Принимая во внимание выражения (1) и (6), находим характеристики $f_j(E_j)$ нелинейных преобразователей при бигауссовской аппроксимации плотности вероятности шума на выходе ГА:

$$f_j(E_j) = \frac{1}{2\sigma_{gj}^2}\,\frac{(1-p_j)\exp\{-\varepsilon_j\} + p_j\gamma_j^2\exp\{-\gamma_j\varepsilon_j\}}{(1-p_j)\exp\{-\varepsilon_j\} + p_j\gamma_j\exp\{-\gamma_j\varepsilon_j\}},$$

где $\varepsilon_j = E_j/(2\sigma_{gj}^2)$, $\gamma_j = \sigma_{gj}^2/\sigma_{aj}^2 \ll 1$.

Характерные параметры I_j, от которых зависит коэффициент относительной эффективности ρ (5) локально-оптимального обнаружителя, для аномально-засоренных помех определяются следующим выражением:

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2\sigma_{gj}^2}\left[1 - p_j\mu_j\xi_j(\mu_j,\nu_j)\right], \\ \xi(\mu,\nu) &= 1 + \frac{\mu}{\mu+1}\nu^\mu\int_0^1\frac{\ln x\,dx}{x^\mu+\nu^\mu}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mu_j = (1-\gamma_j)/\gamma_j \gg 1$, $\nu_j = [p_j\gamma_j/(1-p_j)]^{1/\mu_j}$. В общем случае для вычисления интеграла (7) приходится использовать методы численного интегрирования.

3. Основные результаты и выводы

1. Стандартная методика [2, 3] обнаружения СГФ, учитывающая глобальный характер гравитационного излучения, основана на измерении коэффициента корреляции между шумами на выходе отдельных ГА. При гауссовских шумах, статистические свойства которых однозначно определяются корреляционной матрицей, эффективность такого алгоритма оказывается близкой к оптимальной [4] и зависит только от размера выборки N.

При негауссовских шумах для обнаружения слабого СГФ необходимо использовать нелинейный локально-оптимальный алгоритм, основанный на разложении безусловного отношения правдоподобия в ряд Тейлора по степеням малого энергетического параметра — ковариации $K_{12}(0)$.

2. В состав локально-оптимального обнаружителя слабого СГФ при негауссовских шумах входят нелинейные безынерционные преобразователи, характеристики (1) которых определяются плотностями вероятности $W_{1,2}(e_{1,2})$ квадратов огибающих $e_{1,2}(t)$ узкополосных шумов на выходах ГА. В условиях априорной недостаточности характеристики безынерционных преобразователей вычисляются по параметрическим оценкам неизвестных функций распределения. При фиксированном отношении сигнал–шум q_0 на выходе гауссовского приемника применение дополнительного безынерционного нелинейного преобразователя может привести к значительному увеличению вероятности правильного обнаружения СГФ $D = 1 - \beta$.

3. Наличие хаотических импульсных помех позволяет рассматривать шумы на выходе ГА как аномально-засоренный гауссовский процесс. При бигауссовской параметрической аппроксимации плотности вероятности $W_{1,2}(e_{1,2})$ определяются выражением (6). Параметры бигауссовского распределения — $p_{1,2}$, $\sigma_{g1,2}^2$, $\sigma_{a1,2}^2$ — при слабом СГФ определяются по абсолютным [6] или начальным [5] выборочным моментам.

4. Известно, что коэффициент относительной эффективности ρ локально-оптимального алгорит-

ма при обнаружении слабого детерминированного сигнала на фоне аномально-засоренной помехи выражается через элементарные функции [6]. При локально-оптимальном обнаружении слабого СГФ обработке подвергается квадрат огибающей $E(t)$ на выходе ГА. При этом зависимость коэффициента ρ (5) от параметров p, σ_g^2 и σ_a^2 оказывается более сложной, что делает необходимым при вычислении ρ применение методов численного интегрирования.

5. Локально-оптимальный алгоритм обнаружения слабого СГФ по выборке с независимыми элементами устойчив не только к распределению аддитивных шумов на выходе ГА [5, 6], но и к распределению полезного сигнала. Основные результаты сохраняются и при непрерывном негауссовском СГФ.

Литература

1. *Grishchuk L.P., Lipunov V.M., Postnov K.A.* et al. // LANL Archiv astro-ph/0008481 30 Aug. (2000).
2. *Allen B.* // Proc. Les. Houches School on Astrophysical Sources of Gravitational Waves / Eds. J.A. Murck, J.P. Lasota. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
3. *Vitale S., Cerdonio M., Coccia E., Ortolan A.* // Phys. Rev. D. 1997. **55**, No. 4. P. 1741.
4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1994.
5. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999.
6. *Новоселов О.Н., Фомин А.Ф.* Основы теории и расчета информационно-измерительных систем. М.: Машиностроение, 1991.

Поступила в редакцию
10.05.00

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 538.56+535

МОДУЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ СЖАТЫХ СОСТОЯНИЙ

Ю. Е. Дьяков

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

Предложен и рассмотрен новый метод реализации преобразований типа «несжатое состояние $\rightleftarrows$ сжатое состояние», в котором используется простая линейная система с модулятором (М-система). Показано, что для гармонического сигнала М-система является фазочувствительной: амплитуда сигнала на выходе может существенно зависеть от его фазы на входе.

1. Под классическим полем в сжатом состоянии будем понимать узкополосный случайный процесс

$$y = \tfrac{1}{2}\tilde{A}e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} = a\cos\omega_0 t - b\sin\omega_0 t, \qquad <y> = 0, \tag{1}$$

для комплексной амплитуды которого $\tilde{A} = a + ib$ выполняется условие [1]

$$<\tilde{A}^2> = <a^2> - <b^2> + 2i<ab> \neq 0. \tag{2}$$

Процесс (1) не является стационарным, так как его дисперсия меняется со временем по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$:

$$<y^2> = \frac{1}{2}<\tilde{A}\tilde{A}^*> + \frac{1}{4}\left(<\tilde{A}^2>e^{i\cdot 2\omega_0 t} + \text{к. с.}\right).$$

2. Случайные поля в сжатом состоянии обладают рядом замечательных свойств [2, с. 85]. В связи с различными возможностями применения сжатых полей представляет интерес поиск простых и эффективных способов их получения. В настоящей работе предлагается и анализируется новый метод генерации классических (неквантовых) сжатых полей, основанный на применении модулятора.

Пусть

$$x = \rho\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

— узкополосный стационарный (т. е. несжатый) случайный процесс, и мы хотим его «сжать». Анализ существующих методов сжатия наводит на мысль, что основным принципом сжатия является следующий: нужно каким-то образом преобразовать x в процесс

$$x_- = \rho\cos(\omega_0 t - \varphi + \varphi_0) \tag{3}$$

с обращенной (или сопряженной) фазой φ, а затем сложить x и x_-. Можно показать, что процессы x и x_-, сами по себе несжатые, в сумме образуют сжатый процесс

$$y = x + Cx_-, \tag{4}$$

параметры сжатия которого определяются постоянными φ_0 и C.